Matematika gazdaságinformatikusoknak III.
(Halmazok, függvények)

Készült az EFOP-3.4.4-16-2017-00028 számú, „Innovatív megoldások a WSUF hallgatói létszámának növelésére, MTMI képzési palettájának erősítésére” című projekt keretében.

Budapest, 2017-2019.

1. HALMAZOK, RELÁCIók, függvények

1.1. MEGJEGYZÉS:

1.1.1.

A halmaz, elem és halmazhoz tartozás fogalmakat ismertnek tételezzük fel és értelemszerűen használjuk az  jelöléseket.

1.1.2.

Feltételezzük, hogy pontosan egy olyan halmaz létezik, amelynek nincs eleme és ezt -val jelöljük.

1.1.3.

Az egész fejezetben feltételezünk egy elegendően tág alaphalmazt. Ha azt írjuk, hogy:
”A halmaz”, azt úgy értjük, hogy ennek az alaphalmaznak részhalmaza, a kisbetűk pedig – ha mást nem mondunk – ennek az elemei.

1.2. DEFINÍCIÓ:

Ha
  halmaz
akkor legyen
 
 
Ha
 akkor  részhalmaza -nek,
ha
  és  akkor  valódi részhalmaza -nek.

1.3. MEGJEGYZÉS:

1.3.1.

Belátható, hogy minden  halmaz esetén  teljesül.

1.3.2.

Egy halmazt két módon definiálhatunk:
 a) felsoroljuk az elemeit
 b) megadunk egy tulajdonságot, amellyel pontosan a halmaz elemei rendelkeznek.

1.4. DEFINÍCIÓ:

Ha
  halmaz, 
akkor legyen
  ( és  uniója)
  ( és  metszete)
  ( és  különbsége)
  (Az „A” halmaz -re vonatkozó  komplementere)
  és  diszjunkt

1.5. TÉTEL:

Legyen
  halmaz, 
ekkor
  
  
  
  
  
  

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.6. TÉTEL:

Legyen

  halmaz, 
ekkor
  
 
  
  

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.7. DEFINÍCIÓ:


Az  és  elemekből képezett rendezett elempár.

1.8. TÉTEL:

Legyen
 és  rendezett elempár
ekkor
 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.9. DEFINÍCIÓ:

Ha
  és  halmazok
akkor legyen
 
 az  és  halmazok Descartes szorzata.

1.10. DEFINÍCIÓ:

Ha
  és  halmazok és 
akkor
 az  halmazt ( és  közötti binér) relációnak, a
  halmazt az  reláció értelmezési tartományának, az
  halmazt pedig az  reláció értékkészletének nevezzük.
 Az  helyett általában  jelölést használunk.

1.11. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor
 
 Az  halmaz neve: az  halmaz képe az  relációnál. Ha nem okoz félreértést, akkor helyett -et írunk.

1.12. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor legyen
 
 Az  relációt az  reláció inverzének nevezzük.

1.13. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
  olyan reláció, amelyre teljesül, hogy  és
  reflexív 
 szimmetrikus 
 tranzitív 
akkor
 -t az  ekvivalenciarelációjának nevezzük.

1.14. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
  olyan reláció, amelyre teljesül, hogy  és
  reflexív 
 antiszimmetrikus 
 tranzitív 
akkor
 -t az  parciális rendezési relációjának vagy parciális rendezésének nevezzük.
Ha még
  is teljesül, akkor
 -t az  rendezési relációjának vagy rendezésének nevezzük.
Ha
  az  parciális rendezési vagy rendezési relációja,
akkor az
  rendezett párt parciálisan rendezett illetve rendezett halmaznak nevezzük.
 (A parciális rendezést a továbbiakban a  jellel jelöljük.)

1.15. DEFINÍCIÓ:

Ha
  parciálisan rendezett halmaz,
akkor
 .

1.16. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor
  függvény 

1.17. DEFINÍCIÓ:

Ha
  halmaz
akkor
 
 Y

1.18. MEGJEGYZÉS:

1.18.1.

A függvényekkel kapcsolatban a következő elnevezéseket és jelöléseket használjuk.
Ha
 
akkor azt írjuk, hogy
 
azt mondjuk, hogy az  függvény az -től az -hoz vezető leképezés. Az  halmazt a függvény képhalmazának is szokták nevezni.

1.18.2.

Ha , akkor az
 
 
  jelöléseket is használjuk.

1.18.3.

A leképzés szót a függvény szóval azonos értelemben használjuk.
Ha  akkor  az -et -ba, ha pedig  akkor -ra képezi le.

1.18.4.

Mivel a függvény az 1.16. szerint halmaz, ezért megadása úgy történik, mint általában a halmazok megadása:
 a) felsoroljuk azokat az  elemeket, amelyekből áll
 b) megadunk egy olyan tulajdonságot, amely pontosan a szóbanforgó  elemeket jellemzi.

1.19. DEFINÍCIÓ:

Ha
  függvény, 
akkor legyen
 
 Az  függvényt az  függvény  halmazra való leszűkítésének (ugyanakkor -et az  függvény -re való kiterjesztésének) nevezzük.

1.20. MEGJEGYZÉS:

Ha
 
akkor az
 
 halmazt a  halmaz  szerinti (teljes) inverz képének nevezzük.

1.21. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor
 -et invertálhatónak nevezzük  függvény
 -et injektívnek nevezzük 

1.22. TÉTEL:

Legyen
 
ekkor
  invertálható   injektív

BIZONYÍTÁS:

 i)  invertálható  függvény. Ekkor
 
 ii) injektív és  még sem függvény. Ekkor van olyan , amelyhez van olyan , amelyre  teljesül . De ez az injektivitás miatt azt jelenti, hogy . Az ellentmondás bizonyítja az állítást.

1.23. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
 és
 
akkor
 -t a -ből és -ből összetett függvénynek nevezzük és -fel jelöljük.

1.24. MEGJEGYZÉS:

Belátható, hogy  valóban függvény.

1.25. TÉTEL:

Legyen
 
ekkor
 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.26. DEFINÍCIÓ:

Ha
  halmaz
akkor az
  leképezést az  halmaz identikus leképezésének nevezzük.

1.27. DEFINÍCIÓ:

Ha
  halmaz
akkor
 jelöli  összes részhalmazának halmazát.

1.28. DEFINÍCIÓ:

Ha

  és  halmazok, és
  injektív
akkor a
  halmazt az  halmaz indexhalmazának nevezzük és ha 
akkor az
  jelölést használjuk.
 Az  indexelt halmazrendszer elemeinek uniója.
 
 és metszete
 

1.29. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valamely részhalmazának van olyan  indexhalmaza, amelyre teljesül, hogy
 i) 
 ii) 
 iii) 
akkor az
  halmazt az  halmaz egy osztályozásának, az  részhalmazokat pedig az osztályozás osztályainak nevezzük.

1.30. TÉTEL:

Legyen
 
ekkor
  egy tetszőleges  ekvivalenciarelációja meghatározza az  egy **H** osztályozását és
  egy tetszőleges **H** osztályozása meghatározza az  egy  ekvivalenciarelációját.

BIZONYÍTÁS:

1. Legyen  ekvivalenciareláció, 
Belátjuk, hogy **H** az  osztályozása:
a) Mivel  reflexív, ezért **H** elemei nem üres halmazok
b) **H** ugyanis:
Legyen , ekkor  tehát  minden eleme valamely **H**-beli  eleme, így  részhalmaza **H** elemei egyesítésének. A fordított irányú tartalmazás nyilvánvaló.
c) **H**, , ugyanis létezik , hogy .
Tegyük fel indirekt, hogy van olyan , hogy .
Legyen .
A  hasonlóan bizonyítható, így P=Q, ami ellentmond a  feltételnek.
2. Legyen **H** az  egy osztályozása és **H** hogy .
Ez a  reláció ekvivalenciareláció, ugyanis:
reflexív, mert minden -hoz létezik olyan **H**, hogy , tehát .
szimmetrikus, mert, ha , azaz létezik olyan **H** osztály, amelynek a és b is eleme, akkor 
tranzitív, mert, ha , akkor létezik **H**, hogy .

1.31. TÉTEL:

Legyen
  parciálisan rendezett halmaz
ekkor
 i) 
 ii) 
 iii) 
Ha
  rendezett,
akkor
 iv)  vagy  vagy .

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló

1.32. TÉTEL:

Legyen
  parciálisan rendezett halmaz, 
ekkor legfeljebb egy
  illetve  létezik, úgy, hogy
  illetve 

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt, hogy



 -re hasonlóan bizonyítható az állítás.

1.33. DEFINÍCIÓ:

Ha
  parciálisan rendezett halmaz, 
akkor legyen
 
 max 

1.34. DEFINÍCIÓ:

Legyen
  parciálisan rendezett halmaz, 
 i) Ha
 
 akkor -t az  egy alsó korlátjának, -t pedig alulról korlátosnak nevezzük.
 ii) Ha
 
 akkor -t az  egy felső korlátjának, -t pedig felülről korlátosnak nevezzük.
 iii) Ha
  alulról és felülről korlátos, akkor korlátosnak nevezzük.

1.35. DEFINÍCIÓ:

Ha
  parciálisan rendezett halmaz, 
akkor
 legyen
 
 
 (Az -t  alsó határának, -t  felső határának is nevezik.)

1.36. DEFINÍCIÓ:

Ha
  parciálisan rendezett halmaz, 
akkor legyen
 
 
 
 

2. valós függvények

2.1. MEGJEGYZÉS:

Ha az  függvény értelmezési tartománya , akkor (de csak akkor) néha eltekintünk az értelmezési tartomány feltüntetésétől.
Az  függvényeket valós-valós vagy ha nem okoz félreértést valós függvényeknek nevezzük.

2.2. DEFINÍCIÓ:





**Q**



2.3. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor legyen

 

2.4. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor legyen
 
 

2.5. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor a
 
 függvényt az  halmaz karakterisztikus függvényének nevezzük.
 A  függvényeket Dirichlet féle függvénynek nevezik.

2.6. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor az
 
 függvényt valós lineáris függvénynek nevezzük.

2.7. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
 
 
akkor
 
 
 
 

2.8. MEGJEGYZÉS:

Ha
 
akkor
 
 

2.9. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor
 
 

2.10. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor az
 
 függvény -edfokú racionális egészfüggvénynek vagy polinomfüggvénynek nevezzük.

2.11. DEFINÍCIÓ:

Valamely  függvényt racionális törtfüggvénynek nevezünk, ha van olyan  és  polinomfüggvény, hogy .

2.12. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor legyen
 
Ha
 
akkor
 legyen .

2.13. MEGJEGYZÉS:

 
 
 
  és 
 és ha  páratlan, akkor  és 

2.14. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
 
 
akkor
 
 

2.15. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
és
  akkor  pozitív,
  akkor  nem negatív
  akkor  negatív
  akkor  nem pozitív

2.16. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
és
 , akkor -et monoton növekedőnek, (jele  ⭧)
 , akkor -et monoton csökkenőnek, (jele  ⭨)
Ha  nem egyelemű
és
 , akkor -et szigorúan monoton növekedőnek (jele )
 , akkor -et szigorúan monoton csökkenőnek
 (jele )
 nevezzük.
A monoton növekedő és a monoton csökkenő függvényeket monoton függvényeknek, míg a szigorúan monoton növekedő illetve csökkenő függvényeket szigorúan monoton függvényeknek nevezzük.

2.17. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény
 
akkor
 azt mondjuk, hogy  az  halmazon
 1) monoton növekedő
 2) monoton csökkenő
 3) szigorúan monoton növekedő
 4) szigorúan monoton csökkenő
 ha
  rendelkezik az 1), 2), 3), 4) tulajdonságokkal.

2.18. MEGJEGYZÉS:

(1) Legyen  való függvény. Ekkor  akkor és csak akkor monoton növekedő (szigorúan monoton növekedő) ha  monoton fogyó (szigorúan monoton fogyó).
(2) Legyen
 
Ekkor
  esetben 
  esetben 
  esetben ⭧ és ⭨

2.19. TÉTEL:

Legyen
  számsorozat
ekkor
 ⭧  esetén 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.20. TÉTEL:

Minden szigorúan monoton valós függvény invertálható.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.21. Példa:

Legyen
 
ekkor
 ⭧, ⭧⭧
 ⭧, ⭨⭨
 ⭨⭧⭨
 ⭨⭨⭧

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.22. Példa:

Ha
  páratlan

akkor
 
Ha
  páros
akkor
  nem monoton, de
 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.23. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
akkor legyen
 
 
(A „megkettőzött” zárójelet más, hasonló értelemben is használjuk.)

2.24. MEGJEGYZÉS:

Ha
  az  nyílt intervalluma,
 
 
akkor az
  és az  pontot összekötő húron a következő ponthalmazt értjük:
 

2.25. TÉTEL:

Legyen
 
ekkor
  (\*)

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel először, hogy  és legyen .
Ekkor . Legyen ezért .
Ezért , tehát  eleme a (\*) jobb oldalán álló halmaznak is, vagyis .
Megfordítva: tegyük fel, hogy . Ez azt jelenti, hogy , hogy .
Innen  miatt adódik, hogy , vagyis . Tehát .
Legyen most . Ekkor az előbbiek szerint .
Ez az egyenlőség a  jelöléssel így írható fel: ,
vagyis (\*) fennáll  esetben is. 

2.26. DEFINÍCIÓ:

Ha
  az  intervalluma
akkor azt mondjuk, hogy az
  függvény (alulról) [szigorúan] konvex
ha
  
 és
  
 esetében
 
 

2.27. TÉTEL:

Legyen
  az  intervalluma
 
ekkor
  pontosan akkor (alulról) [szigorúan] konvex
ha
 ,  esetében
 az
  és 
 pontot összekötő húr egyetlen pontja sincs alatta [minden pontja felette van] az
 
 függvény grafikonjának.

BIZONYÍTÁS:

(1) ⇒
Tegyük fel, hogy  konvex, és legyen 
Ekkor 3.26. szerint  esetében
.
Legyen most  ha , ekkor

 
A szigorúan konvexitásra vonatkozó állítás megfelelő része hasonlóan bizonyítható.

(2) ⇐
Tegyük fel, hogy  és  és  esetén
  fennáll.
Legyen ezután . Ekkor 3.25. alapján
, tehát , hogy
 , így

 
 .
A szigorúan konvexitásra vonatkozó állítás megfelelő része hasonlóan bizonyítható.

2.28. DEFINÍCIÓ:

Ha
 
  az  intervalluma, 
akkor
  az  intervallumon [szigorúan] konvex  [szigorúan] konvex.

2.29. MEGJEGYZÉS:

A konkáv függvények a konvex függvényekhez hasonlóan értelmezhetők, azzal a különbséggel, hogy a  jel helyett  jelet írunk, illetve a szigorúan konkáv függvények esetében a < jel helyett > jelet írunk.

2.30. TÉTEL:

Legyen
  az  intervalluma
 
ekkor
  pontosan akkor [szigorúan] konvex, ha  [szigorúan] konkáv.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.31. TÉTEL:

Legyen
  [szigorúan] konvex valós függvény,
  az  intervalluma
ekkor
  is [szigorúan] konvex.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.32. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény
akkor
  alulról [felülről] korlátos, ha  alulról [felülről] korlátos.
 Alulról [felülről] korlátos függvény alsó [felső] korlátján értékkészlete alsó [felső] korlátját értjük.
Ha
  alulról és felülről korlátos
akkor
 -et korlátos függvénynek nevezzük.

2.33. DEFINÍCIÓ:

Ha
  alulról [felülről] korlátos valós függvény
akkor
 -nek létezik abszolút minimuma [maximuma]   és ezt a szóban forgó függvény abszolút minimumának [maximumának] nevezzük.
Ha
 -nek van abszolút minimuma
akkor
 -nek azt az  elemét, amelyre ,  abszolút minimum helyének [maximumhelyének] nevezzük.
 Az abszolút szélsőérték (extrémum, optimum) kifejezés az abszolút minimum és az abszolút maximum gyűjtőneve.

2.34. MEGJEGYZÉS:

 A kétféle szélsőérték közül elegendő csak az egyikkel foglalkozni, hiszen ha például az  valós függvénynek  minimumhelye, akkor -nek  maximumhelye.

2.35. MEGJEGYZÉS:

 A továbbiakban az  korlátos és zárt intervallumot kompaktnak fogjuk nevezni.

2.36. TÉTEL:

Legyen
  kompakt intervallum
 
 ⭧
ekkor
 , tehát  az  abszolút minimumhelye és  pedig az  abszolút maximumhelye.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.37. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény és
 
akkor
 -et páros függvénynek nevezzük.

2.38. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény és
 
akkor
 -et páratlan függvénynek nevezzük.

2.39. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény
 
 
akkor
 -et -val periodikus függvénynek nevezzük.
Ha
  valós függvény
akkor
  periodikus  hogy  periodikus -val.
Ha
  valós függvény periodikus és periódusai között van legkisebb
akkor ezt
  alapperiódusának nevezzük.

2.40. MEGJEGYZÉS:

Az abszolút érték definíciója alapján:
1) 
2) 
3) 

2.41. DEFINÍCIÓ:

Ha
  halmaz és
  olyan, hogy
 1) 
 2) 
 3) 
akkor az
  rendezett párt metrikus térnek, a  függvényt pedig metrikának nevezzük.

2.42. MEGJEGYZÉS:

3.40. alapján nyilvánvaló, hogy  metrikus tér.

2.43. DEFINÍCIÓ:

Ha
  metrikus tér, 
akkor a
 
 halmazt  középpontú,  sugarú nyílt gömbnek nevezzük és azt az
  halmazt, amelynek , hogy 
 az  pont környezetének nevezzük.

2.44. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény
 ,
 van olyan  környezet -nak, hogy  abszolút minimumhelye az -nek
akkor
 -t az  lokális minimumhelyének nevezzük.
 Az előzőhöz hasonlóan az abszolút szélsőértékhez kapcsolódó összes definíciónak van lokális megfelelője.

2.45. DEFINÍCIÓ:

Ha
  metrikus tér, 
akkor
 -t az  belső pontjának nevezzük  hogy .
 Az  halmaz belső pontjainak halmazát  belsejének nevezzük és -rel jelöljük.
 -t nyílt halmaznak nevezzük .

2.46. DEFINÍCIÓ:

Ha
  valós függvény
 
 van olyan  környezete -nak, hogy
  esetén  és
  esetén 
akkor
 azt mondjuk, hogy  az  pontban lokálisan növekedő.
 Hasonlóan fogalmazható a lokális csökkenés és a szigorú lokális csökkenés definíciója is.

2.47. MEGJEGYZÉS:

 A megfelelő definíciókból következik, hogy ha ⭧, , akkor  lokálisan növekedő
 -ban.
 Az állítás megfordítva nem igaz.

2.48. TÉTEL:

Legyen
  az  intervalluma
 
  szigorúan lokálisan növekedő  minden pontjában
ekkor
  szigorúan monoton növekedő.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.49. MEGJEGYZÉS:

 A fenti tétel megfogalmazható növekedésre, és szigorú csökkenésre és növekedésre is.

2.50. MEGJEGYZÉS:

 Láttuk, hogy a lokális minimum egyúttal abszolút minimuma is az illető függvény egy alkalmas leszűkítésének, de nem áll fenn ez a kapcsolat a monoton és lokális növekedés között.
 Példa: 

2.51. DEFINÍCIÓ:

Ha
 ,  és van -nak olyan  környezet, hogy 
akkor
 azt mondjuk, hogy  -ban lokálisan ekvivalens -vel és ezt
 -vel jelöljük.