Matematika gazdaságinformatikusoknak III.  
(Halmazok, függvények)

Készült az EFOP-3.4.4-16-2017-00028 számú, „Innovatív megoldások a WSUF hallgatói létszámának növelésére, MTMI képzési palettájának erősítésére” című projekt keretében.

Budapest, 2017-2019.

1. HALMAZOK, RELÁCIók, függvények

1.1. MEGJEGYZÉS:

1.1.1.

A halmaz, elem és halmazhoz tartozás fogalmakat ismertnek tételezzük fel és értelemszerűen használjuk az  jelöléseket.

1.1.2.

Feltételezzük, hogy pontosan egy olyan halmaz létezik, amelynek nincs eleme és ezt -val jelöljük.

1.1.3.

Az egész fejezetben feltételezünk egy elegendően tág alaphalmazt. Ha azt írjuk, hogy:   
”A halmaz”, azt úgy értjük, hogy ennek az alaphalmaznak részhalmaza, a kisbetűk pedig – ha mást nem mondunk – ennek az elemei.

1.2. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  halmaz  
akkor legyen  
   
   
Ha  
 akkor  részhalmaza -nek,  
ha  
  és  akkor  valódi részhalmaza -nek.

1.3. MEGJEGYZÉS:

1.3.1.

Belátható, hogy minden  halmaz esetén  teljesül.

1.3.2.

Egy halmazt két módon definiálhatunk:  
 a) felsoroljuk az elemeit  
 b) megadunk egy tulajdonságot, amellyel pontosan a halmaz elemei rendelkeznek.

1.4. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  halmaz,   
akkor legyen  
  ( és  uniója)  
  ( és  metszete)  
  ( és  különbsége)  
  (Az „A” halmaz -re vonatkozó  komplementere)  
  és  diszjunkt

1.5. TÉTEL:

Legyen  
  halmaz,   
ekkor  
    
    
    
    
    
  

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.6. TÉTEL:

Legyen

 halmaz,   
ekkor  
    
    
    
  

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.7. DEFINÍCIÓ:

  
Az  és  elemekből képezett rendezett elempár.

1.8. TÉTEL:

Legyen  
 és  rendezett elempár  
ekkor  
 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.9. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  és  halmazok  
akkor legyen  
   
 az  és  halmazok Descartes szorzata.

1.10. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  és  halmazok és   
akkor  
 az  halmazt ( és  közötti binér) relációnak, a   
  halmazt az  reláció értelmezési tartományának, az  
  halmazt pedig az  reláció értékkészletének nevezzük.  
 Az  helyett általában  jelölést használunk.

1.11. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor  
   
 Az  halmaz neve: az  halmaz képe az  relációnál. Ha nem okoz félreértést, akkor helyett -et írunk.

1.12. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor legyen  
   
 Az  relációt az  reláció inverzének nevezzük.

1.13. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
  olyan reláció, amelyre teljesül, hogy  és   
  reflexív   
 szimmetrikus   
 tranzitív   
akkor  
 -t az  ekvivalenciarelációjának nevezzük.

1.14. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
  olyan reláció, amelyre teljesül, hogy  és   
  reflexív   
 antiszimmetrikus   
 tranzitív   
akkor  
 -t az  parciális rendezési relációjának vagy parciális rendezésének nevezzük.  
Ha még  
  is teljesül, akkor   
 -t az  rendezési relációjának vagy rendezésének nevezzük.  
Ha  
  az  parciális rendezési vagy rendezési relációja,   
akkor az  
  rendezett párt parciálisan rendezett illetve rendezett halmaznak nevezzük.  
 (A parciális rendezést a továbbiakban a  jellel jelöljük.)

1.15. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  parciálisan rendezett halmaz,  
akkor  
 .

1.16. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor  
  függvény 

1.17. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  halmaz  
akkor  
   
 Y

1.18. MEGJEGYZÉS:

1.18.1.

A függvényekkel kapcsolatban a következő elnevezéseket és jelöléseket használjuk.  
Ha  
   
akkor azt írjuk, hogy  
   
azt mondjuk, hogy az  függvény az -től az -hoz vezető leképezés. Az  halmazt a függvény képhalmazának is szokták nevezni.

1.18.2.

Ha , akkor az  
   
   
  jelöléseket is használjuk.

1.18.3.

A leképzés szót a függvény szóval azonos értelemben használjuk.  
Ha  akkor  az -et -ba, ha pedig  akkor -ra képezi le.

1.18.4.

Mivel a függvény az 1.16. szerint halmaz, ezért megadása úgy történik, mint általában a halmazok megadása:  
 a) felsoroljuk azokat az  elemeket, amelyekből áll  
 b) megadunk egy olyan tulajdonságot, amely pontosan a szóbanforgó  elemeket jellemzi.

1.19. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  függvény,   
akkor legyen  
   
 Az  függvényt az  függvény  halmazra való leszűkítésének (ugyanakkor -et az  függvény -re való kiterjesztésének) nevezzük.

1.20. MEGJEGYZÉS:

Ha  
   
akkor az  
   
 halmazt a  halmaz  szerinti (teljes) inverz képének nevezzük.

1.21. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor  
 -et invertálhatónak nevezzük  függvény  
 -et injektívnek nevezzük 

1.22. TÉTEL:

Legyen  
   
ekkor  
  invertálható   injektív

BIZONYÍTÁS:

i)  invertálható  függvény. Ekkor   
   
 ii) injektív és  még sem függvény. Ekkor van olyan , amelyhez van olyan , amelyre  teljesül . De ez az injektivitás miatt azt jelenti, hogy . Az ellentmondás bizonyítja az állítást.

1.23. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
 és  
   
akkor  
 -t a -ből és -ből összetett függvénynek nevezzük és -fel jelöljük.

1.24. MEGJEGYZÉS:

Belátható, hogy  valóban függvény.

1.25. TÉTEL:

Legyen  
   
ekkor  
 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.26. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  halmaz  
akkor az  
  leképezést az  halmaz identikus leképezésének nevezzük.

1.27. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  halmaz  
akkor  
 jelöli  összes részhalmazának halmazát.

1.28. DEFINÍCIÓ:

Ha

 és  halmazok, és  
  injektív  
akkor a  
  halmazt az  halmaz indexhalmazának nevezzük és ha   
akkor az  
  jelölést használjuk.  
 Az  indexelt halmazrendszer elemeinek uniója.  
   
 és metszete  
 

1.29. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valamely részhalmazának van olyan  indexhalmaza, amelyre teljesül, hogy   
 i)   
 ii)   
 iii)   
akkor az  
  halmazt az  halmaz egy osztályozásának, az  részhalmazokat pedig az osztályozás osztályainak nevezzük.

1.30. TÉTEL:

Legyen  
   
ekkor  
  egy tetszőleges  ekvivalenciarelációja meghatározza az  egy **H** osztályozását és   
  egy tetszőleges **H** osztályozása meghatározza az  egy  ekvivalenciarelációját.

BIZONYÍTÁS:

1. Legyen  ekvivalenciareláció,   
   Belátjuk, hogy **H** az  osztályozása:  
   a) Mivel  reflexív, ezért **H** elemei nem üres halmazok  
   b) **H** ugyanis:  
   Legyen , ekkor  tehát  minden eleme valamely **H**-beli  eleme, így  részhalmaza **H** elemei egyesítésének. A fordított irányú tartalmazás nyilvánvaló.  
   c) **H**, , ugyanis létezik , hogy .  
   Tegyük fel indirekt, hogy van olyan , hogy .  
   Legyen .  
   A  hasonlóan bizonyítható, így P=Q, ami ellentmond a  feltételnek.
2. Legyen **H** az  egy osztályozása és **H** hogy .  
   Ez a  reláció ekvivalenciareláció, ugyanis:  
   reflexív, mert minden -hoz létezik olyan **H**, hogy , tehát .  
   szimmetrikus, mert, ha , azaz létezik olyan **H** osztály, amelynek a és b is eleme, akkor   
   tranzitív, mert, ha , akkor létezik **H**, hogy .

1.31. TÉTEL:

Legyen  
  parciálisan rendezett halmaz  
ekkor  
 i)   
 ii)   
 iii)   
Ha  
  rendezett,  
akkor  
 iv)  vagy  vagy .

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló

1.32. TÉTEL:

Legyen  
  parciálisan rendezett halmaz,   
ekkor legfeljebb egy  
  illetve  létezik, úgy, hogy  
  illetve 

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt, hogy

  
  
 -re hasonlóan bizonyítható az állítás.

1.33. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  parciálisan rendezett halmaz,   
akkor legyen  
   
 max 

1.34. DEFINÍCIÓ:

Legyen  
  parciálisan rendezett halmaz,   
 i) Ha  
   
 akkor -t az  egy alsó korlátjának, -t pedig alulról korlátosnak nevezzük.  
 ii) Ha  
   
 akkor -t az  egy felső korlátjának, -t pedig felülről korlátosnak nevezzük.  
 iii) Ha  
  alulról és felülről korlátos, akkor korlátosnak nevezzük.

1.35. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  parciálisan rendezett halmaz,   
akkor  
 legyen  
   
   
 (Az -t  alsó határának, -t  felső határának is nevezik.)

1.36. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  parciálisan rendezett halmaz,   
akkor legyen  
   
   
   
 

2. valós függvények

2.1. MEGJEGYZÉS:

Ha az  függvény értelmezési tartománya , akkor (de csak akkor) néha eltekintünk az értelmezési tartomány feltüntetésétől.  
Az  függvényeket valós-valós vagy ha nem okoz félreértést valós függvényeknek nevezzük.

2.2. DEFINÍCIÓ:

  
  
  
  
**Q**  
  


2.3. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor legyen



2.4. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor legyen  
   
 

2.5. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor a  
   
 függvényt az  halmaz karakterisztikus függvényének nevezzük.  
 A  függvényeket Dirichlet féle függvénynek nevezik.

2.6. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor az  
   
 függvényt valós lineáris függvénynek nevezzük.

2.7. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
   
   
akkor  
   
   
   
 

2.8. MEGJEGYZÉS:

Ha  
   
akkor  
   
 

2.9. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor  
   
 

2.10. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor az  
   
 függvény -edfokú racionális egészfüggvénynek vagy polinomfüggvénynek nevezzük.

2.11. DEFINÍCIÓ:

Valamely  függvényt racionális törtfüggvénynek nevezünk, ha van olyan  és  polinomfüggvény, hogy .

2.12. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor legyen  
   
Ha  
   
akkor  
 legyen .

2.13. MEGJEGYZÉS:

  
   
   
  és   
 és ha  páratlan, akkor  és 

2.14. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
   
   
akkor  
   
 

2.15. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
és  
  akkor  pozitív,  
  akkor  nem negatív  
  akkor  negatív  
  akkor  nem pozitív

2.16. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
és  
 , akkor -et monoton növekedőnek, (jele  ⭧)  
 , akkor -et monoton csökkenőnek, (jele  ⭨)  
Ha  nem egyelemű  
és  
 , akkor -et szigorúan monoton növekedőnek (jele )  
 , akkor -et szigorúan monoton csökkenőnek   
 (jele )  
 nevezzük.  
A monoton növekedő és a monoton csökkenő függvényeket monoton függvényeknek, míg a szigorúan monoton növekedő illetve csökkenő függvényeket szigorúan monoton függvényeknek nevezzük.

2.17. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény  
   
akkor  
 azt mondjuk, hogy  az  halmazon  
 1) monoton növekedő  
 2) monoton csökkenő  
 3) szigorúan monoton növekedő  
 4) szigorúan monoton csökkenő  
 ha  
  rendelkezik az 1), 2), 3), 4) tulajdonságokkal.

2.18. MEGJEGYZÉS:

(1) Legyen  való függvény. Ekkor  akkor és csak akkor monoton növekedő (szigorúan monoton növekedő) ha  monoton fogyó (szigorúan monoton fogyó).  
(2) Legyen  
   
Ekkor  
  esetben   
  esetben   
  esetben ⭧ és ⭨

2.19. TÉTEL:

Legyen  
  számsorozat  
ekkor  
 ⭧  esetén 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.20. TÉTEL:

Minden szigorúan monoton valós függvény invertálható.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.21. Példa:

Legyen  
   
ekkor  
 ⭧, ⭧⭧  
 ⭧, ⭨⭨  
 ⭨⭧⭨  
 ⭨⭨⭧

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.22. Példa:

Ha  
  páratlan

akkor  
   
Ha  
  páros  
akkor  
  nem monoton, de  
 

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.23. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
akkor legyen  
   
   
(A „megkettőzött” zárójelet más, hasonló értelemben is használjuk.)

2.24. MEGJEGYZÉS:

Ha  
  az  nyílt intervalluma,  
   
   
akkor az  
  és az  pontot összekötő húron a következő ponthalmazt értjük:  
 

2.25. TÉTEL:

Legyen  
   
ekkor  
  (\*)

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel először, hogy  és legyen .  
Ekkor . Legyen ezért .  
Ezért , tehát  eleme a (\*) jobb oldalán álló halmaznak is, vagyis .  
Megfordítva: tegyük fel, hogy . Ez azt jelenti, hogy , hogy .  
Innen  miatt adódik, hogy , vagyis . Tehát .  
Legyen most . Ekkor az előbbiek szerint .  
Ez az egyenlőség a  jelöléssel így írható fel: ,   
vagyis (\*) fennáll  esetben is. 

2.26. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  az  intervalluma  
akkor azt mondjuk, hogy az  
  függvény (alulról) [szigorúan] konvex  
ha  
    
 és  
    
 esetében  
   
 

2.27. TÉTEL:

Legyen  
  az  intervalluma  
   
ekkor  
  pontosan akkor (alulról) [szigorúan] konvex  
ha  
 ,  esetében  
 az  
  és   
 pontot összekötő húr egyetlen pontja sincs alatta [minden pontja felette van] az  
   
 függvény grafikonjának.

BIZONYÍTÁS:

(1) ⇒  
Tegyük fel, hogy  konvex, és legyen   
Ekkor 3.26. szerint  esetében   
.  
Legyen most  ha , ekkor   
  
   
A szigorúan konvexitásra vonatkozó állítás megfelelő része hasonlóan bizonyítható.  
  
(2) ⇐  
Tegyük fel, hogy  és  és  esetén  
  fennáll.  
Legyen ezután . Ekkor 3.25. alapján  
, tehát , hogy  
 , így  
  
   
 .  
A szigorúan konvexitásra vonatkozó állítás megfelelő része hasonlóan bizonyítható.

2.28. DEFINÍCIÓ:

Ha  
   
  az  intervalluma,   
akkor  
  az  intervallumon [szigorúan] konvex  [szigorúan] konvex.

2.29. MEGJEGYZÉS:

A konkáv függvények a konvex függvényekhez hasonlóan értelmezhetők, azzal a különbséggel, hogy a  jel helyett  jelet írunk, illetve a szigorúan konkáv függvények esetében a < jel helyett > jelet írunk.

2.30. TÉTEL:

Legyen  
  az  intervalluma  
   
ekkor  
  pontosan akkor [szigorúan] konvex, ha  [szigorúan] konkáv.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.31. TÉTEL:

Legyen  
  [szigorúan] konvex valós függvény,  
  az  intervalluma  
ekkor  
  is [szigorúan] konvex.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.32. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény  
akkor  
  alulról [felülről] korlátos, ha  alulról [felülről] korlátos.  
 Alulról [felülről] korlátos függvény alsó [felső] korlátján értékkészlete alsó [felső] korlátját értjük.  
Ha  
  alulról és felülről korlátos  
akkor  
 -et korlátos függvénynek nevezzük.

2.33. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  alulról [felülről] korlátos valós függvény  
akkor  
 -nek létezik abszolút minimuma [maximuma]   és ezt a szóban forgó függvény abszolút minimumának [maximumának] nevezzük.  
Ha  
 -nek van abszolút minimuma  
akkor  
 -nek azt az  elemét, amelyre ,  abszolút minimum helyének [maximumhelyének] nevezzük.  
 Az abszolút szélsőérték (extrémum, optimum) kifejezés az abszolút minimum és az abszolút maximum gyűjtőneve.

2.34. MEGJEGYZÉS:

A kétféle szélsőérték közül elegendő csak az egyikkel foglalkozni, hiszen ha például az  valós függvénynek  minimumhelye, akkor -nek  maximumhelye.

2.35. MEGJEGYZÉS:

A továbbiakban az  korlátos és zárt intervallumot kompaktnak fogjuk nevezni.

2.36. TÉTEL:

Legyen  
  kompakt intervallum  
   
 ⭧  
ekkor  
 , tehát  az  abszolút minimumhelye és  pedig az  abszolút maximumhelye.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.37. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény és  
   
akkor  
 -et páros függvénynek nevezzük.

2.38. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény és  
   
akkor  
 -et páratlan függvénynek nevezzük.

2.39. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény  
   
   
akkor  
 -et -val periodikus függvénynek nevezzük.  
Ha  
  valós függvény  
akkor  
  periodikus  hogy  periodikus -val.  
Ha  
  valós függvény periodikus és periódusai között van legkisebb  
akkor ezt  
  alapperiódusának nevezzük.

2.40. MEGJEGYZÉS:

Az abszolút érték definíciója alapján:  
1)   
2)   
3) 

2.41. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  halmaz és  
  olyan, hogy  
 1)   
 2)   
 3)   
akkor az  
  rendezett párt metrikus térnek, a  függvényt pedig metrikának nevezzük.

2.42. MEGJEGYZÉS:

3.40. alapján nyilvánvaló, hogy  metrikus tér.

2.43. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  metrikus tér,   
akkor a  
   
 halmazt  középpontú,  sugarú nyílt gömbnek nevezzük és azt az  
  halmazt, amelynek , hogy   
 az  pont környezetének nevezzük.

2.44. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény  
 ,  
 van olyan  környezet -nak, hogy  abszolút minimumhelye az -nek  
akkor  
 -t az  lokális minimumhelyének nevezzük.  
 Az előzőhöz hasonlóan az abszolút szélsőértékhez kapcsolódó összes definíciónak van lokális megfelelője.

2.45. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  metrikus tér,   
akkor  
 -t az  belső pontjának nevezzük  hogy .  
 Az  halmaz belső pontjainak halmazát  belsejének nevezzük és -rel jelöljük.  
 -t nyílt halmaznak nevezzük .

2.46. DEFINÍCIÓ:

Ha  
  valós függvény  
   
 van olyan  környezete -nak, hogy   
  esetén  és   
  esetén   
akkor  
 azt mondjuk, hogy  az  pontban lokálisan növekedő.  
 Hasonlóan fogalmazható a lokális csökkenés és a szigorú lokális csökkenés definíciója is.

2.47. MEGJEGYZÉS:

A megfelelő definíciókból következik, hogy ha ⭧, , akkor  lokálisan növekedő   
 -ban.  
 Az állítás megfordítva nem igaz.

2.48. TÉTEL:

Legyen  
  az  intervalluma  
   
  szigorúan lokálisan növekedő  minden pontjában  
ekkor  
  szigorúan monoton növekedő.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

2.49. MEGJEGYZÉS:

A fenti tétel megfogalmazható növekedésre, és szigorú csökkenésre és növekedésre is.

2.50. MEGJEGYZÉS:

Láttuk, hogy a lokális minimum egyúttal abszolút minimuma is az illető függvény egy alkalmas leszűkítésének, de nem áll fenn ez a kapcsolat a monoton és lokális növekedés között.  
 Példa: 

2.51. DEFINÍCIÓ:

Ha  
 ,  és van -nak olyan  környezet, hogy   
akkor  
 azt mondjuk, hogy  -ban lokálisan ekvivalens -vel és ezt  
 -vel jelöljük.