TARTALOM

1. HALMAZOK, RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK 2
2. VALÓS SZÁMOK 16
3. VALÓS FÜGGVÉNYEK 24
4. SZÁMSOROZATOK KONVERGENCIÁJA 42
5. TÁGABB ÉRTELEMBEN VETT KONVERGENCIA 60
6. NUMERIKUS SOROK 70
7. FOLYTONOSSÁG 76
8. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE 98
10. HATÁROZATLAN INTEGRÁL 127
11. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 131
12. HATVÁNYSOROK 154
13. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 163

1. HALMAZOK, RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

1.1. MEGJEGYZÉS:

1.1.1.

A halmaz, elem és halmazhoz tartozás fogalmakat ismertnek tételezzük fel és értelemszerűen használjuk az $a \in A, a \ni A, a \notin A$ jelöléseket.

1.1.2.

Feltételezzük, hogy pontosan egy olyan halmaz létezik, amelynek nincs eleme és ezt $\varnothing$-val jelöljük.

1.1.3.

Az egész fejezetben feltételezünk egy elegendően tág alaphalmazt. Ha azt írjuk, hogy: ”A halmaz”, azt úgy értjük, hogy ennek az alaphalmaznak részhalmaza, a kisbetűk pedig – ha mást nem mondunk – ennek az elemei.

1.2. DEFINÍCIÓ:

Ha

$A, \quad B$ halmaz,

akkor legyen

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B, \quad B \subset A$$

Ha

$A \subset B$, akkor A részhalmaza B -nek,

ha

$A \subset B$, és $A \neq B, \quad A \neq \varnothing$ akkor A valódi részhalmaza B -nek.

1.3. MEGJEGYZÉS:

1.3.1.

Belátható, hogy minden A halmaz esetén $\varnothing \subset A$ teljesül.

1.3.2.

Egy halmazt két módon definiálhatunk:

a) felsoroljuk az elemeit

b) megadunk egy tulajdonságot, amellyel pontosan a halmaz elemei rendelkeznek.

1.4. DEFINÍCIÓ:

Ha

X halmaz, $A, B \subset X$,

akkor legyen

$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$ (A és B uniója)

$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$ (A és B metszete)

$A - B := \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$ (A és B különbsége)

$\overline{A} := C_x A := X - A$ (Az „A” halmaz $< x$-re vonatkozó > komplementere)

A és B diszjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = 0$.

1.5. TÉTEL:

Legyen

X halmaz, $A, B \subset X$,

ekkor

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$[A \cup B] \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$A \cup 0 = A$ $\qquad$ $A \cap 0 = 0$

$A \cup X = X$ $\qquad$ $A \cap X = A$

$A \cup \overline{A} = X$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = 0$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.6. TÉTEL:

Legyen

X halmaz, $A, B \subset X$,

ekkor

$$C_x X = \varnothing \qquad C_x \varnothing = X$$

$$C_x\left(C_x A\right) = A$$

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.7. DEFINÍCIÓ:

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Az x és y elemekből képezett rendezett elempár.

1.8. TÉTEL:

Legyen

(a, b)és (x, y) rendezett elempár,

ekkor

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x,\ b = y$$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.9. DEFINÍCIÓ:

Ha

A és B halmazok,

akkor legyen

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

az A és B halmazok Descartes szorzata.

1.10. DEFINÍCIÓ:

Ha

A és B halmazok és $S \subset A \times B$,

akkor

az S halmazt (A és B közötti binér) relációnak, a

$D_s := \{x \in A : \exists y \in B \quad hogy \quad (x, y) \in S\}$ halmazt az S reláció értelmezési tartományának,

az

$R_s := \{y \in B : \exists x \in A \quad hogy \quad (x, y) \in S\}$ halmazt pedig az S reláció értékkészletének nevezzük.

Az $(x, y) \in S$ helyett általában xSy jelölést használunk.

1.11. DEFINÍCIÓ:

Ha

$S \subset X \times Y, \quad A \subset X$,

akkor

$S(A) := \{y \in Y \quad hogy \quad \exists x \in A \quad amelyre \quad (x, y) \in S\}$

Az $S(A)$ halmaz neve: az A halmaz képe az S relációnál. Ha nem okoz félreértést, akkor $S(\{x\})$ helyett $S(x)$-et írunk.

1.12. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$S \subset X \times Y$$

akkor legyen

$S^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in S\}$

Az S^{-1} relációt az S reláció inverzének nevezzük.

1.13. DEFINÍCIÓ:

Ha

$A \neq \emptyset$

$H \subset A \times A$ olyan reláció, amelyre teljesül, hogy $D_H = A$ és

H reflexív $(\forall a)((a \in A) \rightarrow (aHa))$

szimmetrikus $(\forall a)(\forall b)((a \in A, b \in A, aHb) \rightarrow (bHa))$

tranzitív $(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a \in A, b \in A, c \in A, aHb, bHc) \rightarrow (aHc))$

akkor

H-t az A ekvivalenciarelációjának nevezzük.

1.14. DEFINÍCIÓ:

Ha

$A \neq \emptyset$

$H \subset A \times A$ olyan reláció, amelyre teljesül, hogy $D_H = A$ és

H reflexív $(\forall a)((a \in A) \rightarrow (aHa))$

antiszimmetrikus $(\forall a)(\forall b)((a \in A, b \in A, aHb, bHa) \rightarrow a = b)$

tranzitív $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a \in A, b \in A, c \in A, aHb, bHc \rightarrow aHc)$

akkor

H-t az A parciális rendezési relációjának vagy parciális rendezésének nevezzük.

Ha még

$(\forall a)(\forall b)(a \in A, b \in A \rightarrow aHb \vee bHa)$ is teljesül, akkor

H-t az A rendezési relációjának vagy rendezésének nevezzük

Ha

H az A parciális rendezési vagy rendezési relációja,

akkor az

(A, H) rendezett párt parciálisan rendezett illetve rendezett halmaznak nevezzük.

(A parciális rendezést a továbbiakban a $\leq$ jellel jelöljük.)

1.15. DEFINÍCIÓ:

Ha

$(A, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz,

akkor

$x < y \Leftrightarrow x \leq y, x \neq y$.

1.16. DEFINÍCIÓ:

Ha

$S \subset X \times Y$

akkor

S függvény $\Leftrightarrow (x_1, y_1), (x_1, y_2) \in S \Rightarrow y_1 = y_2$

1.17. DEFINÍCIÓ:

Ha

X, Y halmaz

akkor

$$X \to Y := \{f \subset X \times Y : f \quad \textit{függvény}\}$$

$$Y^X := \{f \in X \to Y : D_f = X\}$$

1.18. MEGJEGYZÉS:

1.18.1.

A függvényekkel kapcsolatban a következő elnevezéseket és jelöléseket használjuk.

Ha

$f \in X \times Y \quad \textit{és} \quad D_f = X$

akkor azt írjuk, hogy

$f : X \to Y, \quad \textit{és}$

azt mondjuk, hogy az f függvény az X-től az Y-hoz vezető leképezés. Az Y halmazt a függvény képhalmazának is szokták nevezni.

1.18.2.

Ha $f : X \to Y$, akkor az

$f_x := f(x), \quad x \in X$

$(f_x)x \in X$

$\{f_x\}_{x \in X} = R_f$ jelöléseket is használjuk.

1.18.3.

A leképzés szót a függvény szóval azonos értelemben használjuk.

Ha $f : X \to Y \quad és \quad R_f \neq Y$ akkor f az X-et Y-ba, ha pedig $R_f = Y,$ akkor Y-ra képezi le.

1.18.4.

Mivel a függvény az 1.16. szerint halmaz, ezért megadása úgy történik, mint általában a halmazok megadása:

a) felsoroljuk azokat az $(x, f(x))$ elemeket, amelyekből áll

b) megadunk egy olyan tulajdonságot, amely pontosan a szóbanforgó $(x, f(x))$ elemeket jellemzi.

1.19. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f : X \to Y$ függvény, $A \subset D_f$

akkor legyen

$f|_A := \{(x, y) \in f : \quad x \in A\}$

Az $f|_A$ függvényt az f függvény A halmazra való leszűkítésének (ugyanakkor f-et az $f|_A$ függvény D_f-re való kiterjesztésének) nevezzük.

1.20. MEGJEGYZÉS:

Ha

$f \in X \to Y, \quad B \subset Y$

akkor az

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

halmazt a B halmaz f szerinti (teljes) inverz képének nevezzük.

1.21. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in X \to Y$

akkor

f-et invertálhatónak nevezzük $\Leftrightarrow$ f^{-1} függvény

f-et injektívnek nevezzük $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in D_f, y \in D_f, f(x) = f(y)) \to x = y)$

1.22. TÉTEL:

Legyen

$f : X \to Y, \quad f \neq \varnothing$

ekkor

f invertálható $\Leftrightarrow$ f injektív

BIZONYÍTÁS:

i) *Tfh* f invertálható $\Rightarrow f^{-1}$ függvény.

Ekkor $b := f(x) = f(y) \Rightarrow bf^{-1}x, bf^{-1}y \Rightarrow x = y$

ii) *Tfh* f injektív és f^{-1} még sem függvény. Ekkor van olyan $b \in Y$, amelyhez van olyan $p, q \in X, p \neq q$, amelyre $bf^{-1}p$ *és* $bf^{-1}q$ teljesül $\Rightarrow pfb, qfb \Rightarrow f(p) = f(q) = b$. De ez az injektivitás miatt azt jelenti, hogy $p = q$. Az ellentmondás bizonyítja az állítást.

1.23. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in X \to Y, \quad g \in Y \to Z$

és

$h := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \text{ amelyre } y = f(x), z = g(y)\}$

akkor

h-t a g-ből és f-ből összetett függvénynek nevezzük és $g \circ f$-fel jelöljük.

1.24. MEGJEGYZÉS:

Belátható, hogy $g \circ f$ valóban függvény.

1.25. TÉTEL:

Legyen

$$f : X \to Y, g : Y \to Z, A \subset X$$

ekkor

$$(g \circ f)(A) = g(f(A))$$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

1.26. DEFINÍCIÓ:

Ha

X halmaz

akkor az

$id_x : X \to X, \quad x \mapsto id_x(x) = x$ leképezést az X halmaz identikus leképezésének nevezzük.

1.27. DEFINÍCIÓ:

Ha

X halmaz

akkor

$P(X)$ jelöli X összes részhalmazának halmazát.

1.28. DEFINÍCIÓ:

Ha

X és $\Gamma \neq \emptyset$ halmazok, és

$f : \Gamma \to P(x)$ injektív

akkor a

Γ halmazt az $f(\Gamma)$ halmaz indexhalmazának nevezzük és ha $A_\gamma := f(\gamma)$

akkor az

$f(\Gamma) = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ jelölést használjuk.

Az $\{A\gamma : \gamma \in \Gamma\} \neq \emptyset$ indexelt halmazrendszer elemeinek uniója.

$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma := \{x \in X : \exists \gamma \in \Gamma \quad hogy \quad x \in A_\gamma\}$

és metszete

$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A\gamma := \{x \in X : \forall \gamma \in \Gamma \quad esetén \quad x \in A_\gamma\}$

1.29. DEFINÍCIÓ:

Ha

$A \neq \emptyset \quad és \quad P(A)$ valamely részhalmazának van olyan Γ indexhalmaza, amelyre teljesül, hogy

i) $A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma}$

ii) $A_\gamma \neq 0 \qquad \gamma \in \Gamma$

iii) $A_\gamma \cap A_\delta = 0 \qquad \gamma, \delta \in \Gamma$

akkor az

$\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazt az A halmaz egy osztályozásának, az A_γ részhalmazokat pedig az osztályozás osztályainak nevezzük.

1.30. TÉTEL:

Legyen

$A \neq \emptyset$

ekkor

A egy tetszőleges H ekvivalenciarelációja meghatározza az A egy **H** osztályozását és

A egy tetszőleges **H** osztályozása meghatározza az A egy H ekvivalenciarelációját.

BIZONYÍTÁS:

i) Legyen $H \subset A \times A$ ekvivalenciareláció, $H_a := \{x \in A : xHa\}$

Belátjuk, hogy **H** $:= \{H_a \subset A : a \in A\}$ az A osztályozása:

a) Mivel H reflexív, ezért **H** elemei nem üres halmazok

b) $\cup$ **H** $= \bigcup_{a \in A} H_a = A$ ugyanis:

Legyen $b \in A$, ekkor $bHb \Rightarrow b \in H_b$, tehát A minden eleme valamely **H**-beli H_b eleme, így A részhalmaza **H** elemei egyesítésének. A fordított irányú tartalmazás nyilvánvaló.

c) $P, Q \in$ **H**, $P \neq Q \Rightarrow P \cap Q = \varnothing$, ugyanis létezik $p, q \in A$, hogy $P = H_p$ *és* $Q = H_q$.

Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $\gamma \in A$, hogy $\gamma \in P \cap Q, \quad ekkor \quad \gamma \in P \Rightarrow \gamma Hp \Rightarrow pH\gamma$.

Legyen $x \in P \Rightarrow xHp \Rightarrow xHp \overset{pH\gamma}{\Rightarrow} aH\gamma \overset{\gamma \in Q}{\Rightarrow} xHq \Rightarrow x \in Hq \Rightarrow x \in Q \overset{x \in P}{\Rightarrow} P \subset Q$.

A $Q \subset P$ hasonlóan bizonyítható, így P=Q, ami ellentmond a $P \neq Q$ feltételnek.

ii) Legyen **H** az A egy osztályozása és $H := \{(a, b) \in A \times A : \exists C \in$ **H** hogy $a, b \in C\}$. Ez a H reláció ekvivalenciareláció, ugyanis: reflexív, mert minden $a \in A$-hoz létezik olyan $P \in$ **H**, hogy $a \in P$, tehát aHa. szimmetrikus, mert, ha aHb, azaz létezik olyan $P \in$ **H** osztály, amelynek a és b is eleme, akkor $b, a \in P \Rightarrow bHa$ tranzitív, mert, ha $aHb \; és \; bHc$, akkor létezik $P, Q \in$ **H**, hogy

$a, b \in P; b, c \in Q \Rightarrow P \cap Q \neq 0 \Rightarrow P = Q \Rightarrow C \in P \Rightarrow aHc$.

1.31. TÉTEL:

Legyen

$(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz

ekkor

i) $x \in X \Rightarrow x \not< x$

ii) $x < y \Rightarrow y \not< x$

iii) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$

Ha

$(X, \leq)$ rendezett,

akkor

iv) $x, y \in X \Rightarrow x < y$ vagy $x = y$ vagy $x > y$.

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló

1.32. TÉTEL:

Legyen

$(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, $A \subset X$

ekkor legfeljebb egy

$a \in A$ illetve $b \in A$ létezik, úgy, hogy

$(\forall x \in A): x \leq b$ illetve $a \leq x$

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt, hogy

$a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ *és* $\forall x \in A - ra : a_1 \leq x$ *és* $a_2 \leq x$

$$\left.\begin{array}{l} Legyen \quad x := a_2, \quad ekkor \quad a_1 \leq a_2 \\ Legyen \quad x := a_1, \quad ekkor \quad a_2 \leq a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_2$$

b-re hasonlóan bizonyítható az állítás.

1.33. DEFINÍCIÓ:

Ha

$(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, $A \subset X$

akkor legyen

$$\min A = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ \forall x \in A : a \leq x \end{cases}$$

$$\max A = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \in A \\ \forall x \in A : x \leq b \end{cases}$$

1.34. DEFINÍCIÓ:

Legyen

$(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, $A \subset X$

i) Ha

$\exists k \in X \; hogy \; \forall x \in A - ra \quad k \leq x$

akkor k-t az A egy alsó korlátjának, A-t pedig alulról korlátosnak nevezzük.

ii) Ha

$\exists K \in X \; hogy \; \forall x \in A - ra \quad x \leq K$

akkor K-t az A egy felső korlátjának, A-t pedig felülről korlátosnak nevezzük.

iii) Ha

A alulról és felülről korlátos, akkor korlátosnak nevezzük.

1.35. DEFINÍCIÓ:

Ha

$(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, $A \subset X$

akkor

legyen

$\inf A := \max \{k \in X : k \; alsó \; korlátja \; A - nak\}$

$\sup A := \min \{K \in X : K \; felső \; korlátja \; A - nak\}$

(Az $\inf A$-t A alsó határának, $\sup A$-t A felső határának is nevezik.)

1.36. DEFINÍCIÓ:

Ha

$(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, $\alpha, \beta \in X, \alpha < \beta$

akkor legyen

$$]\alpha, \beta[:= \{x \in X : \alpha < x < \beta\}$$

$$]\alpha, \beta[:= \{x \in X : \alpha \leq x < \beta\}$$

$$]\alpha, \beta[:= \{x \in X : \alpha < x \leq \beta\}$$

$$]\alpha, \beta[:= \{x \in X : \alpha \leq x \leq \beta\}$$

2. VALÓS SZÁMOK

2.1. DEFINÍCIÓ:

Legyen $\mathbb{R}$ egy halmaz

$+ : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x + y := +(x, y)$

$\cdot : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad xy := \cdot(x, y)$

$\leq \subset \mathbb{R}x\mathbb{R}, \qquad x \leq y := (x, y) \in \leq$

úgy, hogy

I. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ rendezett test

(A_1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

(A_2) $\exists 0 \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 0 = 0 + x = x$

(A_3) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exists -x \in \mathbb{R}: \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$

(A_4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x + y = y + x$

(M_1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (xy)z = x(yz)$

(M_2) $\exists 1 \in \mathbb{R} - \{0\}: \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

(M_3) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R}: \quad xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

(M_4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad xy = yx$

(AM) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad (x + y)z = xz + yz$

(O_1) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq x$

(O_2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

(O_3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(O_4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ vagy $y \leq x$

(AO) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + z \leq y + z$

(MO) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

II. A rendezés arkhimédeszi

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x > 0, y \geq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+$ hogy $ny \geq x$

III. A rendezés teljes

Ha $I_n = [a_n, b_n]$ a valós számok zárt intervallumainak olyan $\mathbb{N}^+$-szal indexelt halmaza, amelyre $I_{n+1} \subset I_n$, akkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} I_n \neq \emptyset.$$

2.2. MEGJEGYZÉS:

Feltételezzük az $\mathbb{N}$ halmaz ismeretét.

2.3. MEGJEGYZÉS:

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $-x$ egyértelműen meghatározott

Ha $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, akkor x^{-1} egyértelműen meghatározott

Ha $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $x^1 := x$ és $x^n := x \cdot x^{n-1}$ ha $n > 1$.

2.4. DEFINÍCIÓ:

Legyen

$$x - y := x + (-y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x}{y} := xy^{-1} \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

2.5. TÉTEL:

(1) $xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0 \qquad x, y \in \mathbb{R}$

(2) $(-1)x = -x, \quad (-x)y = -xy, \quad (-x)(-y) = xy \qquad x, y \in \mathbb{R}$

(3) $x(y - z) = xy - xz \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$

(4) (a) $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \Leftrightarrow xw = yz$

(b) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw + y \cdot z}{yw}$

(c) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x \cdot z}{y \cdot w}$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.6. TÉTEL:

(1) $0 < x \Rightarrow -x < 0$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(2) $0 < 1$

(3) $0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(4) $x \le y, \quad z \le 0 \Rightarrow yz \le xz$ $\qquad x, y, z \in \mathbb{R}$

(5) $x \le y, \quad z \le w \Rightarrow x + z \le y + w$ $\qquad x, y, z, w \in \mathbb{R}$

(6) $0 \le x \le y, \quad 0 \le z \le w \Rightarrow 0 \le xz \le yw$ $\qquad x, y, z, w \in \mathbb{R}$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.7. DEFINÍCIÓ:

Legyen

$$|x| := \begin{cases} x, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \\ -x, & ha\ x < 0 \end{cases}$$

2.8. TÉTEL:

(1) $0 \le |x|, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(2) $|xy| = |x||y|$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

(4) $|x| \le y \Leftrightarrow -y \le x \le y$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}$

(5) $\big||x| - |y|\big| \le |x + y| \le |x| + |y|$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.9. DEFINÍCIÓ:

Legyen

$$SGN(x) := \begin{cases} 1 & ha \quad x > 0 \\ 0 & ha \quad x = 0 \\ -1 & ha \quad x < 0 \end{cases}$$

2.10. DEFINÍCIÓ:

Legyen

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}^- := \mathbb{R} - \mathbb{R}_0^+$$

$$\mathbb{R}_0^- := \mathbb{R} - \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{Z}^+ := \{x \in \mathbf{Z},\ x > 0\}$$

$$\mathbf{Z}^- := \{x \in \mathbf{Z},\ x < 0\}$$

$$\mathbf{Q}^+ := \{x \in \mathbf{Q} :\ x > 0\}$$

$$\mathbf{Q}^- := \{x \in \mathbf{Q} :\ x < 0\}$$

$$\mathbb{N}^+ := \{x \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$$

2.11. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$Y \neq \emptyset$$

akkor a

$\varphi : \mathbb{N}^+ \to Y$ függvényt sorozatnak nevezünk

Egy

$\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ sorozatot indexsorozatnak nevezünk

ha

$$m,n\in\mathbb{N}^+,\quad m<n\Rightarrow\varphi(m)<\varphi(n)$$

2.12. MEGJEGYZÉS:

Néha az $\mathbb{N}\to Y$ típusú függvényeket tekintjük sorozatnak, ezt azonban külön jelezzük.

2.13. DEFINÍCIÓ:

Ha a

$\{H_\alpha:\alpha\in A\}$ halmaz

A indexhalmazára $A=\{1,2,\ldots,n\}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$ vagy $A=\mathbb{N}$ teljesül

akkor

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n}H_\alpha:=\bigcup_{\alpha\in A}H_\alpha \qquad \bigcup_{\alpha=1}^{\infty}H_\alpha:=\bigcup_{\alpha\in A}H_\alpha$$

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n}H_\alpha:=\bigcap_{\alpha\in A}H_\alpha \qquad \bigcap_{\alpha=1}^{\infty}:=\bigcap_{\alpha\in A}H_\alpha$$

2.14. TÉTEL:

Legyen

$H\subset\mathbb{R}$ alulról korlátos, $H\neq\emptyset$

ekkor

$\exists\inf H\in\mathbb{R}$

BIZONYÍTÁS:

1) <u>Rekurzióval definiálunk egy zárt intervallumsorozatot:</u>

H alulról korlátos $\Rightarrow\exists a_1\in\mathbb{R}:a_1$ alsó korlátja H-nak.

$H\neq\emptyset\Rightarrow\exists b_1\in H$

$$a_{i+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_i+b_i)\\ a_i\end{cases}\qquad\text{és}\qquad b_{i+1}=\begin{cases}b_i,\quad ha\quad \frac{1}{2}(a_i+b_i)\ alsó\ korlátja\ H-nak\\ \frac{1}{2}(a_i+b_i),\ egyébként\end{cases}$$

A III. axióma szerint $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$

Legyen $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

2. Belátjuk, hogy α alsó korlátja H-nak:

Tegyük fel indirekt, hogy α nem alsó korlátja H-nak, ekkor $\exists h \in H,$ amelyre $h < \alpha.$

De $\alpha \in [a_n, b_n]$, tehát $\alpha - a_n \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \leq \frac{1}{n}(b_1 - a_1) < \alpha - h$, hacsak n olyan természetes szám, amelyre: $b_1 - a_1 < n(\alpha - h)$.

(Ilyen biztosan létezik a II. axióma miatt.) Ilyen n-re tehát $h < a_n$, ami ellentmond annak, hogy a_n alsó korlátja H-nak.

3. $\alpha = \inf H$

Tegyük fel indirekt, hogy az $a \in \mathbb{R}$ szám H-nak α-nál nagyobb alsó korlátja. Ekkor $a \leq b_n$ és $a_n \leq \alpha < a \Rightarrow 0 < a - \alpha \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{n}(b_1 - a_1) < a - \alpha$, hacsak n olyan természetes szám, amelyre $b_1 - a_1 < n(a - \alpha)$. (Ilyen biztosan létezik a II. axióma szerint.) Ez azonban ellentmondás.

2.15. TÉTEL:

Legyen

$H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, $H \neq \emptyset$

ekkor

$\exists \sup H \in \mathbb{R}$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

2.16. TÉTEL:

$\mathbb{R} \setminus \mathbf{Q} \neq \emptyset$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $H := \{r \in \mathbf{Q}^+ : r^2 < 2\}$

Ekkor $1 \in H \Rightarrow H \neq 0$. H felülről korlátos (pl. 2 felső korlát) $\Rightarrow h := \sup H \in \mathbb{R}$.

Belátjuk, hogy $h \notin \mathbf{Q}$: megmutatjuk, hogy $h \in Q$ esetén $h^2 < 2, \quad h^2 = 2, \quad h^2 > 2$ egyike sem teljesülhet.

(1) $\underline{h^2 \neq 2}$,

mert különben létezne $p, q \in \mathbb{N}^+, \quad (p,q) = 1,$ hogy $h = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow \exists p_1 \in \mathbb{N}^+$ amivel $p = 2p_1 \Rightarrow 2p_1 = q^2 \Rightarrow \exists q_1 \in \in \mathbb{N}^+,$ amivel $q = 2q_1 \Rightarrow (p,q) \neq 1$.

(2) $\underline{h^2 < 2}$

sem teljesülhet, mert $\left(h + \frac{1}{n}\right)^2 = h^2 + \frac{2h}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Leftarrow h^2 + \frac{2h+1}{n} < 2 \Leftarrow 2h + 1 < n\left(2 - h^2\right)$ (ilyen $n \in \mathbb{N}^+$ a II. axióma miatt létezik) miatt H-nak létezne $h + \frac{1}{n}$ alakú eleme is $\Rightarrow h \neq \sup H$.

(3) $\underline{h^2 > 2}$

esetén $\left(h - \frac{1}{n}\right)^2 = h^2 - \frac{2h}{n} + \frac{1}{n^2} > h^2 - \frac{2h}{n} > 2 \Leftarrow n\left(h^2 - 2\right) > 2h$ (és ilyen $n \in \mathbb{N}^+$ is létezik) miatt $h - \frac{1}{n}$ felső korlátja H-nak $\Rightarrow h \neq \sup H$.

2.17. DEFINÍCIÓ:

Az $\mathbb{R}$-$\mathbf{Q}$ halmazt irracionális számok halmazának nevezzük.

2.18. TÉTEL:

Legyen

$x \in \mathbb{R}^+, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$

ekkor

$\exists r \in Q : r \neq 0$ amivel $rx \in]a, b[$

BIZONYÍTÁS:

Legyen például $0 \le a < b,$ és $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $x < n(b-a)$. Legyen továbbá

$$m := \inf\left\{ p \in \mathbb{N}^+ : \frac{b}{x} \le \frac{p}{n} \right\}$$

Ekkor $m > 1$ és $\frac{m-1}{n} < \frac{b}{x}$.

Ha $\frac{m-1}{n} \le \frac{a}{x}\left(< \frac{b}{x} \le \frac{m}{n} \right)$ volna, akkor $\frac{b-a}{x} \le \frac{1}{n}$ lenne, ami n választásának ellentmond.

Ezért

$$\frac{a}{x} < \frac{m-1}{n} \quad \left(< \frac{b}{x} \right).$$

Eszerint azonban $r := \frac{m-1}{n} \in \left]\frac{a}{x}, \frac{b}{x}\right[\Rightarrow rx \in]a, b[\quad és \quad r \neq 0.$

(A többi eset visszavezethető a fenti esetre.)

2.19. TÉTEL:

Minden $]a, b[$ intervallumban van racionális és irracionális szám.

BIZONYÍTÁS:

Ha 2.18.-ban $x = 1,$ akkor azt kapjuk, hogy létezik $r \in Q, \quad r \neq 0$ amire $r \in]a, b[$ teljesül.

Ha 2.18.-ban $x := \sup\left\{ t \in Q^+ : t^2 < 2 \right\}$, akkor $0 < x \in \mathbb{R} - Q$ és ha $r \neq 0$, akkor $rx \in \mathbb{R} - \boldsymbol{Q}$ és $rx \in]a, b[$ 2.18. szerint.

3. VALÓS FÜGGVÉNYEK

3.1. MEGJEGYZÉS:

Ha az f függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, akkor (de csak akkor) néha eltekintünk az értelmezési tartomány feltüntetésétől.

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket valós-valós vagy ha nem okoz félreértést valós függvényeknek nevezzük.

3.2. DEFINÍCIÓ:

$j := id_{\mathbb{R}}$

$j^0 := x \mapsto 1$

$ABS := x \mapsto |x|$

$INT := x \mapsto [x]$

$Q^* := \mathbb{R} - \mathbf{Q}$

$$SGN(x) := \begin{cases} 1 & ha\ x > 0 \\ 0 & ha\ x = 0 \\ -1 & ha\ x < 0 \end{cases}$$

$c(\cdot) := x \mapsto c \qquad (c \in \mathbb{R})$

3.3. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

akkor legyen

$$|f| : D \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$$

3.4. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f : D \subset \mathbb{R} \to I, \qquad a \in \mathbb{R}$$

akkor legyen

$$D + a = a + D = \{x \in \mathbb{R} : (x - a) \in A\}$$

$$f_{[a]} : D + a \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_{[a]}(x) = f(x - a)$$

3.5. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$A \subset \mathbb{R}$$

akkor a

$$X_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & ha\ x \in A \\ 0 & ha\ x \notin -1 \end{cases}$$

függvényt az A halmaz karakterisztikus függvényének nevezzük.

A $X_Q \quad és \quad a \quad X_{Q^*}$ függvényeket Dirichlet féle függvénynek nevezik.

3.6. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$a \in \mathbb{R}$$

akkor az

$$l : x \mapsto a \cdot x$$

függvényt valós lineáris függvénynek nevezzük.

3.7. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$c \in \mathbb{R}$$

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

akkor

$$(cf) : D_f \to \mathbb{R}, \qquad (cf)(x) := c \cdot f(x)$$

$$(f + g) : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g) : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{1}{g} : D_g - g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{g}(x) := \frac{1}{g(x)}$$

3.8. MEGJEGYZÉS:

Ha

$$f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

akkor

$$f + g = g + f \qquad f \cdot g = g \cdot f$$

$$(f + g) + h = f + (g + h) \qquad (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

3.9. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$n \in \mathbb{N}^+ - \{1\},\ f_i \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

akkor

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n := \sum_{i=1}^{n} f_i : \bigcap_{i=1}^{n} D_{fi} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

$$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n := \prod_{i=1}^{n} f_i : \bigcap_{i=1}^{n} D_{fi} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$$

3.10. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}, \quad a_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

akkor az

$$a_0 j^n + \ldots + a_n j^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i j^{n-i}$$

függvény n-edfokú racionális egészfüggvénynek vagy polinomfüggvénynek nevezzük.

3.11. DEFINÍCIÓ:

Valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt racionális törtfüggvénynek nevezünk, ha van olyan p és q polinomfüggvény, hogy $f = \frac{p}{q}$.

3.12. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$x \in \mathbb{R}^+,$$

akkor legyen

$$\sqrt{x} = \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \text{ úgy, hogy} \\ y^2 = x \end{cases} \text{ és } \sqrt{0} = 0.$$

Ha

$$x \in \mathbb{R} \text{ és } n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$$

akkor

legyen $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} x \\ y^n = x \end{cases}$.

3.13. MEGJEGYZÉS:

$$\sqrt{x} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ : r^2 < x\}$$

$$\sqrt{} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{}(x) := \sqrt{x}$$

$$\sqrt{} = \left(j^2 \big|_{\mathbb{R}_0^+} \right)^{-1}$$

$\sqrt[n]{x} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ : r^n < x\}$ és $\sqrt[n]{} = \left(j^n \big|_{\mathbb{R}_0^+} \right)^{-1}$

és ha n páratlan, akkor $\sqrt[n]{} = \left(j^n\right)^{-1}$ és $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$

3.14. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$D = D_f \cap D_g$

akkor

$f < g \Leftrightarrow \forall x \in D : f(x) < g(x)$

$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in D : f(x) \leq g(x)$

3.15. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

és

$f > 0(\cdot)|_{D_f}$ akkor f pozitív,

$f \geq 0(\cdot)|_{D_f}$ akkor f nem negatív

$f < 0(\cdot)|_{D_f}$ akkor f negatív

$f \leq 0(\cdot)|_{D_f}$ akkor f nem pozitív

3.16. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

és

$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, akkor f-et monoton növekedőnek, (jele $f \nearrow$)

$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, akkor f-et monoton csökkenőnek, (jele $f \searrow$)

Ha D_f nem egyelemű

és

$\forall x_1, x_2 \in D_f, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, akkor f-et szigorúan monoton növekedőnek (jele $f \uparrow$)

$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, akkor f-et szigorúan monoton csökkenőnek (jele $f \downarrow$) nevezzük.

A monoton növekedő és a monoton csökkenő függvényeket monoton függvényeknek, míg a szigorúan monoton növekedő illetve csökkenő függvényeket szigorúan monoton függvényeknek nevezzük.

3.17. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény

$A \neq \emptyset, \quad A \subset D_f$

akkor

azt mondjuk, hogy f az A halmazon

1) monoton növekedő
2) monoton csökkenő
3) szigorúan monoton növekedő
4) szigorúan monoton csökkenő

ha

$f|_A$ rendelkezik az 1), 2), 3), 4) tulajdonságokkal.

3.18. MEGJEGYZÉS:

(1) Legyen f való függvény. Ekkor f akkor és csak akkor monoton növekedő (szigorúan monoton növekedő) ha $-f$ monoton fogyó (szigorúan monoton fogyó).

(2) Legyen

$a \in \mathbb{R}, \quad f = a \cdot j$

Ekkor

$a \in \mathbb{R}^+$ esetben $f \uparrow$

$a \in \mathbb{R}^-$ esetben $f \downarrow$

$a = 0$ esetben $f \nearrow$ és $f \searrow$

3.19. TÉTEL:

Legyen

(a_n) számsorozat

ekkor

$(a_n)\nearrow \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

3.20. TÉTEL:

Minden szigorúan monoton valós függvény invertálható.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

3.21. PÉLDA:

Legyen

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ekkor

$f \nearrow,\ g \nearrow \Rightarrow f \circ g \nearrow$

$f \nearrow,\ g \searrow \Rightarrow f \circ g \searrow$

$f \searrow g \nearrow \Rightarrow f \circ g \searrow$

$f \searrow g \searrow \Rightarrow f \circ g \nearrow$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

3.22. PÉLDA:

Ha

$n \in \mathbb{N}^+,$ páratlan

akkor

$j^n \uparrow$

Ha

$n \in \mathbb{N}^+$, páros

akkor

j^n nem monoton, de

$j^n\big|_{\mathbb{R}_0^-} \downarrow$, $j^n\big|_{\mathbb{R}_0^+} \uparrow$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

3.23. DEFINÍCIÓ:

Ha

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$

akkor legyen

$$\left[\left]a, b\right[\right] := \left[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}\right]$$

$$\left]\left]a, b\right[\right[:= \left]\min\{a, b\}, \max\{a, b\}\right[$$

(A „megkettőzött” zárójelet más, hasonló értelemben is használjuk.)

3.24. MEGJEGYZÉS:

Ha

I az $\mathbb{R}$ nyílt intervalluma,

$x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.

$f : I \to \mathbb{R}$

akkor az

$(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontot összekötő húron a következő ponthalmazt értjük:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\left]x_1, x_2\right[\right], y = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_2)\right\}$$

3.25. TÉTEL:

Legyen

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 \neq x_2$

ekkor

$$\left[\left|x_1, x_2\right|\right] = \left\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathbb{R} : \lambda \in [0,1]\right\} \qquad (*)$$

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel először, hogy $x_1 < x_2$ és legyen $x \in [x_1, x_2]$.

Ekkor $0 \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \leq 1$. Legyen ezért $\lambda := \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$.

Ezért $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, tehát x eleme a (*) jobb oldalán álló halmaznak is, vagyis $[x_1, x_2] \subset \{\ldots\}$.

Megfordítva: tegyük fel, hogy $x \in \{\ldots\}$. Ez azt jelenti, hogy $\exists \lambda \in [0,1]$, hogy $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Innen $\lambda \in [0,1]$ miatt adódik, hogy $x_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_1 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x \leq \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2 = x_2$, vagyis $x \in [x_1, x_2]$. Tehát $\{\ldots\} \subset [x_1, x_2]$.

Legyen most $x_2 < x_1$. Ekkor az előbbiek szerint $\left[\left|x_1, x_2\right|\right] = [x_2, x_1] = \left\{\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1 \in \mathbb{R} : \lambda \in [0,1]\right\}$.

Ez az egyenlőség a $\mu := 1 - \lambda.$ jelöléssel így írható fel: $\left[\left|x_1, x_2\right|\right] = \left\{\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in \mathbb{R} : \mu \in [0,1]\right\}$,

vagyis (*) fennáll $x_2 < x_1$ esetben is. □

3.26. DEFINÍCIÓ:

Ha

I az $\mathbb{R}$ intervalluma

akkor azt mondjuk, hogy az

$f : I \to \mathbb{R}$ függvény (alulról) [szigorúan] konvex

ha

$\forall x_1, x_2 \in I \qquad [x_1 \neq x_2]$

és

$\forall \lambda \in [0,1] \qquad [\forall \lambda \in]0,1[]$

esetében

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)]$

3.27. TÉTEL:

Legyen

I az $\mathbb{R}$ intervalluma

$f : I \to \mathbb{R}$

ekkor

f pontosan akkor (alulról) [szigorúan] konvex

ha

$\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetében

az

$(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$

pontot összekötő húr egyetlen pontja sincs alatta [minden pontja felette van]

az

$$f|_{]x_1, x_2[}$$

függvény grafikonjának.

BIZONYÍTÁS:

(1) $\Rightarrow$

Tegyük fel, hogy f konvex, és legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Ekkor 3.26. szerint $\forall \lambda \in [0,1]$ esetében

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

Legyen most $\lambda := \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ ha $x \in [x_1, x_2]$, ekkor

$$f\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}x_1+\frac{x_1-x}{x_1-x_2}x_2\right)\le\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x_1-x}{x_1-x_2}f(x_2)$$

$$f(x)\ \le f(x_2)+\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2)$$

A szigorúan konvexitásra vonatkozó állítás megfelelő része hasonlóan bizonyítható.

(2) $\Leftarrow$

Tegyük fel, hogy $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$ és $\forall x \in [x_1, x_2]$ esetén

$$f(x)\ \le f(x_2)+\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2)$$ fennáll.

Legyen ezután $\lambda \in [0,1]$. Ekkor 3.25. alapján

$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in [x_1, x_2]$, tehát $\exists x \in [x_1, x_2]$, hogy

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, így

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le f(x_2)+\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_2)=$$

$$=f(x_2)+\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(\lambda x_1-\lambda x_2)=$$

$$=f(x_2)+\lambda f(x_1)-\lambda f(x_2)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

A szigorúan konvexitásra vonatkozó állítás megfelelő része hasonlóan bizonyítható.

3.28. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

I az $\mathbb{R}$ intervalluma, $I \subset D_f$

akkor

f az I intervallumon [szigorúan] konvex $\Leftrightarrow$ $f|_I$ [szigorúan] konvex.

3.29. MEGJEGYZÉS:

A konkáv függvények a konvex függvényekhez hasonlóan értelmezhetők, azzal a különbséggel, hogy a $\leq$ jel helyett $\geq$ jelet írunk, illetve a szigorúan konkáv függvények esetében a < jel helyett > jelet írunk.

3.30. TÉTEL:

Legyen

I az $\mathbb{R}$ intervalluma

$f : I \to \mathbb{R}$

ekkor

f pontosan akkor [szigorúan] konvex, ha $-f$ [szigorúan] konkáv.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

3.31. TÉTEL:

Legyen

f [szigorúan] konvex valós függvény,

I az $\mathbb{R}$ intervalluma

ekkor

$f|_I$ is [szigorúan] konvex.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

3.32. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény

akkor

f alulról [felülről] korlátos, ha R_f alulról [felülről] korlátos.

Alulról [felülről] korlátos függvény alsó [felső] korlátján értékkészlete alsó [felső] korlátját értjük.

Ha

f alulról és felülről korlátos

akkor

f-et korlátos függvénynek nevezzük.

3.33. DEFINÍCIÓ:

Ha

f alulról [felülről] korlátos valós függvény

akkor

f-nek létezik abszolút minimuma [maximuma] $\Leftrightarrow \exists \min R_f =: \min f$ $\left[\exists \max R_f =: \max f\right]$ és ezt a szóban forgó függvény abszolút minimumának [maximumának] nevezzük.

Ha

f-nek van abszolút minimuma

akkor

D_f-nek azt az x elemét, amelyre $f(x) = \min f$ $\left[f(x) = \max f\right]$, f abszolút minimum helyének [maximumhelyének] nevezzük.

Az abszolút szélsőérték (extrémum, optimum) kifejezés az abszolút minimum és az abszolút maximum gyűjtőneve.

3.34. MEGJEGYZÉS:

A kétféle szélsőérték közül elegendő csak az egyikkel foglalkozni, hiszen ha például az f valós függvénynek x_0 minimumhelye, akkor $-f$-nek x_0 maximumhelye.

3.35. MEGJEGYZÉS:

A továbbiakban az $[a,b]$ korlátos és zárt intervallumot kompaktnak fogjuk nevezni.

3.36. TÉTEL:

Legyen

$[a,b]$ kompakt intervallum

$f:[a,b]\to \mathbb{R}$

$f\nearrow$

ekkor

$f(a)\le f(x)\le f(b)$, tehát $a\in\mathbb{R}$ az f abszolút minimumhelye és b pedig az f abszolút maximumhelye.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

3.37. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény és

$$\forall x\in D_f:\begin{cases} -x\in D_f & \text{és} \\ f(x)=f(-x) \end{cases}$$

akkor

f-et páros függvénynek nevezzük.

3.38. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény és

$$\forall x\in D_f:\begin{cases} -x\in D_f & \text{és} \\ f(x)=-f(-x) \end{cases}$$

akkor

f -et páratlan függvénynek nevezzük.

3.39. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény

$\varpi \in \mathbb{R}^+$

$$\forall x \in D_f : \begin{cases} x + k\varpi \in D_f & (k \in \mathbb{Z}) \\ f(x + k\varpi) = f(x) & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

akkor

f -et ϖ -val periodikus függvénynek nevezzük.

Ha

f valós függvény

akkor

f periodikus $\Leftrightarrow \exists \varpi \in \mathbb{R}^+$ hogy f periodikus ϖ -val.

Ha

f valós függvény periodikus és periódusai között van legkisebb

akkor ezt

f alapperiódusának nevezzük.

3.40. MEGJEGYZÉS:

Az abszolút érték definíciója alapján:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| \geq 0 \qquad \text{és} \qquad |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x - y| = |y - x|$

3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

3.41. DEFINÍCIÓ:

Ha

X halmaz és

$d : XxX \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

1) $\forall x, y \in X: \quad d(x, y) \geq 0 \qquad \text{és} \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\forall x, y \in X: \quad d(x, y) = d(y, x)$

3) $\forall x, y, z \in X: \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

akkor az

(x, d) rendezett párt metrikus térnek, a d függvényt pedig metrikának nevezzük.

3.42. MEGJEGYZÉS:

3.40. alapján nyilvánvaló, hogy $(\mathbb{R}, ABS)$ metrikus tér.

3.43. DEFINÍCIÓ:

Ha

(X, d) metrikus tér, $x_0 \in X, \quad r \in \mathbb{R}^+$

akkor a

$B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$

halmazt x_0 középpontú, r sugarú nyílt gömbnek nevezzük és azt az

$U \subset X$ halmazt, amelynek $\exists r \in \mathbb{R}^+$, hogy $x_0 \in B(x_0, r) \subset U$

az x_0 pont környezetének nevezzük.

3.44. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény

$a \in D_f$,

van olyan U környezet a-nak, hogy a abszolút minimumhelye az $f|_{U \cap D_f}$-nek

akkor

a-t az f lokális minimumhelyének nevezzük.

Az előzőhöz hasonlóan az abszolút szélsőértékhez kapcsolódó összes definíciónak van lokális megfelelője.

3.45. DEFINÍCIÓ:

Ha

(x, d) metrikus tér, $A \subset X$

akkor

a-t az A belső pontjának nevezzük $\Leftrightarrow$ $\exists r \in \mathbb{R}^+$ hogy $x_0 \in B(x_0, r) \subset A$.

Az A halmaz belső pontjainak halmazát A belsejének nevezzük és A^0-rel jelöljük.

A-t nyílt halmaznak nevezzük $\Leftrightarrow$ $A^0 = A$.

3.46. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény

$a \in D_f$

van olyan U környezete a-nak, hogy

$x \in U \cap D_f, \quad x \le a$ esetén $f(x) \le f(a)$ és

$x \in U \cap D_f, \quad x \ge a$ esetén $f(x) \ge f(a)$

akkor

azt mondjuk, hogy f az "a" pontban lokálisan növekedő.

Hasonlóan fogalmazható a lokális csökkenés és a szigorú lokális csökkenés definíciója is.

3.47. MEGJEGYZÉS:

A megfelelő definíciókból következik, hogy ha $f \nearrow$, $a \in D_f$, akkor f lokálisan növekedő a-ban.

Az állítás megfordítva nem igaz.

3.48. TÉTEL:

Legyen

I az $\mathbb{R}$ intervalluma

$f : I \to \mathbb{R}$

f szigorúan lokálisan növekedő I minden pontjában

ekkor

f szigorúan monoton növekedő.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

3.49. MEGJEGYZÉS:

A fenti tétel megfogalmazható növekedésre, és szigorú csökkenésre és növekedésre is.

3.50. MEGJEGYZÉS:

Láttuk, hogy a lokális minimum egyúttal abszolút minimuma is az illető függvény egy alkalmas leszűkítésének, de nem áll fenn ez a kapcsolat a monoton és lokális növekedés között.

Példa: $$x \mapsto \begin{cases} -1 & ha\ x \in Q^* \cap \mathbb{R}^- \\ 0 & ha\ x \in Q \\ 1 & ha\ x \in Q^* \cap \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

3.51. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f \cap D_g$ és van a-nak olyan U környezet, hogy $f|_{U \cap D_f} = g|_{U \cap D_g}$

akkor

azt mondjuk, hogy f a-ban lokálisan ekvivalens g-vel és ezt

$f \overset{a}{\sim} g$-vel jelöljük.

4. SZÁMSOROZATOK KONVERGENCIÁJA

4.1. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$ sorozat

ekkor

legfeljebb egy olyan $a \in \mathbb{R}$ létezik, amelyre teljesül hogy

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ hogy

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\exists a, b \in X, \quad a \neq b,$ hogy a és b megfelel a feltételnek. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_1 \in \mathbb{N}^+$ és $n_2 \in \mathbb{N}^+$ hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_1$ esetén $|x_n - a| < \varepsilon$ és

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_2$ esetén $|x_n - b| < \varepsilon$.

Legyen $0 < \varepsilon < \frac{|a-b|}{2}$, (ilyen ε biztosan létezik) és legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Ekkor a fentiek alapján, ha $n > n_0$ akkor $|x_n - a| < \varepsilon$ és $|x_n - b| < \varepsilon$, így $|a-b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$. Ez azonban ellentmond ε választásának.

4.2. MEGJEGYZÉS:

A 4.1. TÉTEL természetes módon általánosítható metrikus térre.

4.3. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$ sorozat

$a \in \mathbb{R}$

akkor

azt mondjuk, hogy az x sorozat konvergens és határértéke az $a \in \mathbb{R}$ szám, ha

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |x_1 - a| < \varepsilon$.

Ezt $\lim x = a$ jellel jelöljük.

A nem konvergens sorozatokat divergensnek nevezzük.

4.4. MEGJEGYZÉS:

(1) A 4.3. DEFINÍCIÓ a 4.1. TÉTEL miatt korrekt.

(2) A 4.3. DEFINÍCIÓ természetes módon általánosítható metrikus térre.

(3) A sorozat konvergenciájának a következő „átfogalmazása” érvényes:

4.5. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozat

ekkor

$\lim x = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén az $x^{-1}(\mathbb{R} - B(a, \varepsilon))$ véges.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

4.6. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ és

$\lim x = 0$

akkor

x-et nullsorozatnak nevezzük.

4.7. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n$ konvergens sorozat

ekkor

x korlátos.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $a : \lim x$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy

$n \in \mathbb{N}^+, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$

Legyen $k := \min\{x_1, \ldots, x_{n-1}, \quad a - \varepsilon\}$ és

$K := \max\{x_1, \ldots, x_{n-1}, \quad a + \varepsilon\}.$

Könnyen belátható, hogy k alsó korlát és K felső korlát.

4.8. MEGJEGYZÉS:

A 4.7. TÉTEL metrikus térre való általánosításához szükséges a korlátosság definíciójának általánosítása.

4.9. DEFINÍCIÓ:

Ha

x sorozat

i indexsorozat

Akkor

az $x \circ i$ sorozatot az x részsorozatának nevezzük.

4.10. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat és $a = \lim x$

$y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ az x részsorozata

ekkor

y konvergens és $\lim y = a$.

BIZONYÍTÁS:

Mivel $\lim x = a$ ezért $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Ha $n > n_0$, akkor $n_0 \le i_{n_0} < i_n \Rightarrow n_0 < i_n$, így $|(x \circ i)_n - a| = |x_{i_n} - a| < \varepsilon$.

4.11. MEGJEGYZÉS:

A 4.9. DEFINÍCIÓ és 4.10. TÉTEL általánosítható metrikus terekre.

4.12. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ nullsorozat

$c \in \mathbb{R}$

ekkor

cx nullsorozat.

BIZONYÍTÁS:

Ha $c = 0$ akkor az állítás nyilvánvaló.

Legyen $c \neq 0$, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ hogy

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{|c|} \Rightarrow |c \cdot x_n| < \varepsilon.$

4.13. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ és $y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ nullsorozat

ekkor

$x + y$ nullsorozat.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $\exists n_1 \in \mathbb{N}^+$ és $n_2 \in \mathbb{N}^+$ hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_1 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_2 \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.

Ekkor $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |(x+y)_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

4.14. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ nullsorozat

$y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ korlátos sorozat

ekkor

xy nullsorozat.

BIZONYÍTÁS:

Mivel y korlátos, ezért $\exists K \in \mathbb{R}^+$ hogy $|y_n| < K \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Legyen ezután $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel x nullsorozat, ezért $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$.

Ebből azonban következik, hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |(xy)_n| = |x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon$.

4.15. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}_+^0$

akkor

y majorálja x-et $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ : |x_n| \leq y_n$.

(Akkor is használjuk ezt a kifejezést, ha az egyenlőtlenség csak bizonyos n_0-tól kezdve áll fenn.)

4.16. TÉTEL:

Legyen

y az x majoráló sorozata és

y nullsorozat

ekkor

x nullsorozat.

BIZONYÍTÁS:

Mivel y nullsorozat és $R_y \subset \mathbb{R}_0^+$ ezért $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow 0 \leq y_n < \varepsilon$.

Mivel azonban $|x_n| \leq y_n$ ezért a fentiből $|x_n| < \varepsilon$ következik.

4.17. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens és $a = \lim x$

$y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens és $b = \lim y$

$c \in \mathbb{R}$

ekkor

(1) $c \cdot x$ konvergens és $\lim cx = c \cdot a$

(2) $x + y$ konvergens és $\lim x + y = a + b$

(3) $x \cdot y$ konvergens és $\lim xy = a \cdot b$

BIZONYÍTÁS:

(1) és (2) egyszerű következménye 4.12.-nek és 4.13.-nak.

(3) Megmutatjuk, hogy az $(x_n y_n - ab)$ nullsorozat:

$(x_n y_n - ab) = (y_n(x_n - a) + a(y_n - b))$ nullsorozat.

Ugyanis a jobb oldali első sorozat egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzata, a második pedig egy valós szám és egy nullsorozat szorzata, így maga is nullsorozat.

4.18. TÉTEL:

Legyen

$y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens és $\lim y = b \neq 0$

ekkor

az $\frac{1}{y}$ sorozat konvergens és

$\lim \frac{1}{y} = \frac{1}{b}$.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ekkor $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy

$$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{és} \quad |y_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{b^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$b - \frac{|b|}{2} < y_n < b + \frac{|b|}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$|y_n| > \frac{1}{2}|b|$$

Ezután

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|b| \cdot |y_n|} < \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2|b| \cdot \frac{1}{2}|b|} = \varepsilon .$$

4.19. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens számsorozat és $a = \lim x$

ekkor

$\forall k \in \mathbb{Z}$ esetén $x_{[k]}$ is konvergens és $\lim x_{[k]} = a$.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

4.20. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $z : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens

$\lim x = \lim z$

$y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $x \le y \le z$

ekkor

y konvergens és $\lim x = \lim y = \lim z$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $a = \lim x$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^+$ hogy $n \in \mathbb{N}^+$, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ és $|z_n - a| < \varepsilon$.

Így $a - \varepsilon < x_n$, $z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < y_n < z_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon.$

4.21. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ monoton növekedő [csökkenő]

és (felülről [alulról]) korlátos

ekkor

x konvergens és $\lim x = \sup R_x$ $\left[\lim x = \inf_x\right]$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

4.22. TÉTEL (Bernoulli egyenlőtlenség):

Legyen

$n \in \mathbb{N}^+$ és $h \in \mathbb{R}$, $h > -1$

ekkor

$(1+h)^n \ge 1 + nh$

BIZONYÍTÁS:

Teljes indukcióval:

(1) $n = 1$ esetben az állítás nyilvánvalóan teljesül.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén:

$(1 + nh) \leq (1 + h)^n$ ebből $(1 + h)$-val való szorzással adódik, hogy

$(1 + nh)(1 + h) \leq (1 + h)^{n+1}$

$1 + (n + 1)h + nh^2 \leq (1 + h)^{n+1}$ ebből pedig következik, hogy

$1 + (n + 1)h \leq (1 + h)^{n+1}$.

4.23. PÉLDA:

Legyen $q \in]-1, 1[$

ekkor az $a := (q^n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat nullsorozat.

BIZONYÍTÁS:

Nyilván elegendő a $q \in]0, 1[$ esetre korlátozódni, ugyanis $q = 0$ esetben az állítás nyilvánvalóan teljesül, $q \in]-1, 0[$ esetben pedig $|q^n| = |q|^n$ és itt már $|q| \in]0, 1[$.

Legyen $q \in]0, 1[$. Ekkor $\exists\, h \in \mathbb{R}^+$ hogy $q = \frac{1}{1 + h}$.

A Bernoulli egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetben

$$q^n = \frac{1}{(1 + h)^n} \leq \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{nh} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{h}. \square$$

4.24. PÉLDA:

Legyen

$q \in]-1, 1[$

$a_n := 1 + q + \ldots + q^n \qquad n \in \mathbb{N}^+$

ekkor

$$\lim a = \frac{1}{1 - q}.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, ekkor $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} q^{n+1}$.

Könnyen belátható, hogy $q \in \mathbb{R} -]-1, 1[$ esetben a szóban forgó sorozat divergens.

4.25. PÉLDA:

Legyen

$$a \in \mathbb{R}_0^+$$

ekkor

$$\lim \left(\sqrt[n]{a} \right) = 1.$$

BIZONYÍTÁS:

(1) $\underline{a = 1}$ esetben nyilvánvaló

(2) $\underline{a > 1}$

$$h_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0 \Rightarrow a = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n \Rightarrow \frac{a-1}{n} \geq h_n \Rightarrow \lim(h_n) = 0.$$

(3) $\underline{0 < a < 1}$

$$b := \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim\left(\sqrt[n]{b}\right) = 1 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}} \right) = \lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1. \square$$

4.26. PÉLDA:

$$\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ és $n \geq 2$ ekkor $h_n > 0$ és

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 > \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \Rightarrow h_n < \sqrt{\tfrac{2}{n-1}} \Rightarrow \lim(h_n) = 0. \square$$

4.27. PÉLDA:

Legyen

$$a \in \mathbb{R}^+$$

ekkor

$$\lim\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0 .$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $k > a.$

Ekkor $q := \frac{a}{k} \in]0, 1[.$

Legyen $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > k : \frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a^{n-k}}{(k+1)\cdot \ldots \cdot n} \le \frac{a^k}{k!} q^{n-k} = \frac{a^k}{k!} q^{-k} \cdot q^n .$

Legyen $b := \frac{a^k}{k!} q^{-k}$, ekkor $0 \le \frac{a^n}{n!} \le b \cdot q^n .$

Ez pedig a közrefogási szabály miatt az állítást bizonyítja.□

4.28. PÉLDA:

(1) Legyen

$$k, n \in \mathbb{N}^+, \quad k \le n$$

ekkor

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} .$$

(2) $$n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 .$$

BIZONYÍTÁS:

(1) k szerinti teljes indukcióval bizonyítható

(2) az (1)-ből következik.

4.29. TÉTEL:

(1) Az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ sorozat szigorúan monoton növekedő.

(2) Az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő.

(3) Létezik és egyértelműen meghatározott egy olyan $e \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$$

feltétel teljesül.

BIZONYÍTÁS:

(1) A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik.

(2) Ekvivalens $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$-nel, ami szintén következik a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből.

(3) Mindenesetre $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, tehát e létezik, másrészt

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < 3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{3}{n}.$$

4.30. TÉTEL:

Legyen

$\left(\left[a_n, b_n\right]\right)_{n \in \mathbb{N}^+}$ egymásba skatulyázott intervallumsorozat

(vagyis $n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \left[a_n, b_n\right] \supset \left[a_{n+1}, b_{n+1}\right]$), és $\lim\left(b_n - a_n\right) = 0$

ekkor

létezik pontosan egy $\xi \in \mathbb{R}$, amelyre $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a_n, b_n\right]$.

BIZONYÍTÁS:

A Cantor axióma miatt csak az egyértelműség bizonyítandó.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $\tau \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, amelyre $\xi \neq \tau$.

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$0 < |\xi - \tau| \leq b_n - a_n.$$

Ez azonban ellentmond annak, hogy $b_n - a_n$ nullsorozat.

4.31. DEFINÍCIÓ:

Ha

(X, d) metrikus tér

$A \subset X, \quad a \in X$,

akkor

"a" torlódási pontja A-nak $\Leftrightarrow$ "a" minden U környezetére: $U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Az A torlódási pontjainak halmazát A'-val jelöljük és A derivált halmazának nevezzük.

4.32. BOLZANO – WEIERSTRASS TÉTEL:

Legyen

$A \subset \mathbb{R}$ végtelen és korlátos

ekkor

A-nak van torlódási pontja, vagyis $A' \neq \emptyset$.

BIZONYÍTÁS:

(1) Definiálunk egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozatot:

Mivel A korlátos, ezért van olyan $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, hogy

$A \subset [a_0, b_0]$.

Legyen $[a_1, b_1]$ az $[a_0, b_0]$-nak az a „fele”, amelynek A-val való metszete végtelen.

Folytassuk ezt az eljárást, tehát

$[a_n, b_n] \cap A$

végtelen sok elemet tartalmaz minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mivel $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$ ezért $\lim(b_n - a_n) = 0,$ így a Cantor tétel szerint létezik pontosan

egy $\xi(= \lim(a_n) = \lim(b_n)) \in \mathbb{R}$, amelyre $\xi \in [a_n\ b_n] \qquad n \in \mathbb{N}^+$.

(2) ξ torlódási pontja A-nak

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$\xi = \lim(a_n) \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+, n > n_1 \Rightarrow |a_n - \xi| < \varepsilon$

$\xi = \lim(b_n) \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+, n > n_2 \Rightarrow |b_n - \xi| < \varepsilon$.

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow a_n \in B(\xi, \varepsilon), \quad b_n \in B(\xi, \varepsilon) \Rightarrow [a_n, b_n] \subset B(\xi, \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow [a_n, b_n] \cap A \subset B(\xi, \varepsilon) \cap A..$

Mivel $[a_n, b_n] \cap A$ végtelen, így $B(\xi, \varepsilon) \cap A$ is végtelen, tehát ξ torlódási pontja A-nak.

4.33. BOLZANO-WEIERSTRASS féle kiválasztási TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ korlátos sorozat

ekkor

x-nek van konvergens részsorozata.

BIZONYÍTÁS:

Legyen x korlátos $\Rightarrow$ R_x korlátos.

$(1)\ R_x$ *véges*

Ekkor kell R_x-nek olyan elemének lennie, amely a sorozat végtelen sok elemével egyenlő, vagyis

$\exists c \in R_x$, hogy $x^{-1}(\{c\}) \subset \mathbb{N}^+$ végtelen.

Legyen $i_1 := \min x^{-1}(\{c\})$

$\vdots$

$i_n := \min(x^{-1}(\{c\}) - \{i_1, \ldots, i_{n-1}\}) \qquad n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}.$

$\vdots$

Nyilvánvaló, hogy (i_n) indexsorozat és $a \circ i$ állandó, hiszen

$$(x \circ i)(n) = x_{i_n} = c \ .$$

$(2)\ R_x$ *végtelen*

Ekkor mivel R_x korlátos, az előző tétel szerint van torlódási pontja: Legyen ez $\alpha \in R_x^{'}$.

Ekkor azonban $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén

$x^{-1}(B(\alpha, \varepsilon))$ végtelen.

Legyen $i_1 \in x^{-1}(B(\alpha, 1))$ és

$\vdots$

$i_n \in x^1\left(B\left(\alpha, \frac{1}{n}\right) \cap \right]\max\{i_1, \ldots, i_{n-1}\}, \infty[\right)$

$\vdots$

(más szóval (i_n) legyen monoton növekedő).

Azt állítjuk, hogy $x \circ i$ *konvergens és* $\lim x \circ i = \alpha$.

$|(x \circ i)(n) - \alpha| = |x_{i_n} - \alpha| < \frac{1}{n}$ vagyis $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat majorálja az $(x_{i_n} - \alpha)$ sorozatot, tehát

$\lim(x_{i_n}) = \alpha$.

4.34. DEFINÍCIÓ:

Ha

$A \subset \mathbb{R}$

akkor

A zárt $\Leftrightarrow \overline{A}$ nyílt.

4.35. TÉTEL:

Legyen

$A \subset \mathbb{R}$

ekkor

A zárt $\Leftrightarrow A' \subset A$.

4.36. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$

akkor

$$x \text{ Canchy sorozat } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ - hoz\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^+, hogy \\ n,m \in \mathbb{N}^+, n,m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \end{cases}$$

4.37. PÉLDA:

A

$\left((-1)^n + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ sorozat nem Canchy sorozat.

4.38. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens

ekkor

x Canchy sorozat.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $a := \lim x$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $k \in \mathbb{N}^+, \quad k > n_0$ esetén $|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Eszerint, ha $n,m \in \mathbb{N}^+, \quad n,m > n_0,$ akkor $|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

.□

4.39. MEGJEGYZÉS:

Az előző tétel általánosítható metrikus terekre.

4.40. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ Canchy sorozat

ekkor

x konvergens.

BIZONYÍTÁS:

(1) *Ha x Canchy sorozat, akkor korlátos :*

Legyen $\varepsilon := 1 \quad n_0 \in \mathbb{N}$ pedig az $\varepsilon = 1$-hez tartozó küszöbszám.

Ez azt jelenti, hogy $n, m > n_0 \Rightarrow$

$$|x_n - x_m| < 1 .$$

Legyen $m := n_0 + 1$. Ekkor $n > n_0$ esetén

$$|x_n - x_{n_{0+1}}| < 1 ,$$

vagyis $x_n \in B(x_{n_{0+1}}, 1)$, ezen kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja van, tehát korlátos.

(2) *Ha x korlátos, akkor van konvergens részsorozata,* vagyis van olyan i indexsorozat, hogy $x \circ i$ konvergens.

Legyen $a := \lim x \circ i$. Eszerint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_1 \in \mathbb{N}^+$,

hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_1$ esetén

$$|(x \circ i)(n) - a| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Mivel x Canchy sorozat, ezért $\exists n_2 \in \mathbb{N}^+$,

hogy $m, n > n_2$ esetén

$$|x(n) - x(m)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0$ esetén $i(n) \geq n \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$

miatt

$$|x(n) - (x \circ i)(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy

$$|x(n) - a| \leq |x(n) - (x \circ i)(n)| + |(x \circ i)(n) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ . \square$$

4.41. MEGJEGYZÉS:

Az előző tétel nem érvényes metrikus terekben.

4.42. DEFINÍCIÓ:

Azt a metrikus teret, amelyben minden Canchy sorozat konvergens, teljesnek nevezzük.

5. TÁGABB ÉRTELEMBEN VETT KONVERGENCIA

5.1. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ divergens és

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy

$n \in \mathbb{N}^+, n > n_0 \Rightarrow x_n > \varepsilon \quad [x_n < -\varepsilon]$

akkor

azt mondjuk, hogy x tágabb értelemben konvergens, és tágabb értelemben vett határértéke $+\infty[-\infty]$. Azt is mondjuk, hogy x a ∞-hez $[-\infty - hez]$ divergál.

Jelölés $\lim x = \infty \quad [\lim x = -\infty]$

5.2. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ monoton növekedő [csökkenő] és felülről [alulról] nem korlátos ekkor

$\lim x = +\infty \quad [\lim x = -\infty]$

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló.

5.3. MEGJEGYZÉS:

Nyilvánvaló, hogy

$\lim x = +\infty \Leftrightarrow \lim(-x) = -\infty$

Ezért bármely a $+\infty$-re érvényes állításból adódik egy megfelelő állítás $-\infty$-re.

5.4. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $z : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$

z részsorozata x-nek

ekkor

(1) $\lim x = \infty \Rightarrow \lim z = \infty$

(2) $\lim x = \infty$ *és* y *korlátos* $\Rightarrow \lim(x+y) = +\infty$

(3) $\lim x = \infty$ *és* $\lim y = \infty \Rightarrow \lim(x+y) = +\infty$, $\lim(xy) = \infty$

(4) $\lim x = \infty$ *és* $\lim y = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim(x+y) = +\infty$

(5) $\lim x = \infty$ *és* $c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim(cx) = +\infty$

(6) $\lim x = +\infty$ *és* $\lim y = b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim(xy) = +\infty$

(7) x *korlátos és* $(\lim y = \infty$ *vagy* $\lim y = -\infty) \Rightarrow \lim \frac{x}{y} = 0$

(8) $x_n > 0$, $\lim x = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{x} = \infty$

(9) $\lim x = 0$-ból nem következik $\lim \frac{1}{x} = \infty$ sem $\lim \frac{1}{x} = -\infty$.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

5.5. PÉLDA:

Igazoljuk, hogy

$$\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty .$$

Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Mivel $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ nullsorozat, ezért $1 \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ hogy

$n \in \mathbb{N}^+$, $n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{a^n}{n!} < 1 \Rightarrow a < \sqrt[n]{n!}$. □

5.6. DEFINÍCIÓ:

Legyen

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ úgy hogy

$-\infty < \infty$ és

minden $x \in \mathbb{R}$ esetében

$-\infty < x < \infty$.

5.7. DEFINÍCIÓ:

Ha

$a \in \hat{\mathbb{R}}$ és $r \in \mathbb{R}^+$

akkor a

$$B(a,r) := \begin{cases}]a-r, a+r[& ha \quad a \in \mathbb{R} \\ \left[-\infty, -\frac{1}{r}\right[& ha \quad a = -\infty \\ \left]\frac{1}{r}, +\infty\right] & ha \quad a = +\infty \end{cases}$$

$B(a,r)$ halmazt az a pont r sugarú környezetének nevezzük.

5.8. DEFINÍCIÓ:

Ha

$A \subset \hat{\mathbb{R}}, \quad A \neq \emptyset$

akkor a

$h \in \hat{\mathbb{R}}$ $\left[k \in \hat{\mathbb{R}}\right]$ számot az A alsó [felső] határának nevezzük, ha

1) $\forall x \in A \Rightarrow x \geq h \qquad [x \leq k]$

2) $\forall h^* > h \qquad \left[k^* < k\right]$ esetén van olyan $x \in A$, hogy $x < h^* \qquad \left[x > k^*\right]$

Az A alsó ill. felső határát most is $\inf A$ ill. $\sup A$ jellel jelöljük.

5.9. TÉTEL:

Legyen

$A \subset \hat{\mathbb{R}}, \quad A \neq \emptyset$

Ekkor

A-nak van alsó és felső határa.

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló.

5.10. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$x : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{R}}, \qquad a \in \hat{\mathbb{R}}$$

akkor

$$\lim x = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ : n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon).$$

5.11. MEGJEGYZÉS:

(1) A fenti definíció a 4.3. és 5.1. DEFINÍCIÓ általánosítása.

(2) A fenti definíció korrektsége is bizonyítható, hasonlóan a 4.1. TÉTEL-hez, ehhez azonban szükséges az $\hat{\mathbb{R}}$-ban metrikát definiálni. Ezt például a következő módon tehetjük:

Legyen

$$f : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) := \begin{cases} -1 & ha \quad x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & ha \quad x \in \mathbb{R} \\ 1 & ha \quad x = +\infty \end{cases}$$

És

$$\hat{d} : \hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \hat{d}(x, y) := |f(x) - f(y)|$$

Belátható, hogy ekkor $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ metrikus tér.

5.12. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$A \subset \hat{\mathbb{R}}, \qquad a \in \hat{\mathbb{R}}$$

akkor

a torlódási pontja A-nak $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}^+$ esetén $\left(B(a,r) \setminus \{a\}\right) \cap A \neq \emptyset$.

Az A torlódási pontjainak halmazát A'-vel jelöljük és A derivált halmazának nevezzük.

5.13. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ és

$a : \mathbb{N}^+ \to \hat{\mathbb{R}}, \quad n \mapsto a_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$

$b : \mathbb{N}^+ \to \hat{\mathbb{R}}, \quad n \mapsto b_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$

akkor

$\underline{\lim}\, x := \lim a$

$\overline{\lim}\, x := \lim b$

A $\overline{\lim}\, x$ illetve $\underline{\lim}\, x$ értékeket az x számsorozat felső, illetve alsó határértékének nevezzük. Használatosak a $\limsup x := \overline{\lim} x$, illetve $\liminf x := \underline{\lim}\, x$ jelölések is.

5.14. TÉTEL:

Legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$

ekkor

$\exists \underline{\lim} x$ és $\exists \overline{\lim}\, x$

és

$\underline{\lim}\, x \leq \overline{\lim}\, x$ (1)

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$a_k := \inf\{x_k, x_{k+1}, \ldots\} \qquad (k \in \mathbb{N}^+)$

$b_k := \sup\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ $\quad (k \in \mathbb{N}^+)$

mivel

$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} \subset \{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ ezért

$a_k \le a_{k+1} \le b_{k+1} \le b_k$ $\quad (k \in \mathbb{N}^+)$, így

$$-\infty \le a_1 \le \ldots \le a_k \le \ldots \le b_k \le \ldots \le b_1 \le +\infty \qquad (2)$$

(A) $\underline{\lim} x$ *létezése* (ami ekvivalens $\lim a$ létezésével)

(a) eset: $\exists k \in \mathbb{N}^+$, amelyre $a_k = -\infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ : a_n = -\infty$, ugyanis (2) miatt a k-nál kisebb indexű tagok egyenlők $-\infty$-nel, a k-nál nagyobb indexű tagok közül jelöljön egyet a_m $(m > k)$.

Ha $a_m \neq -\infty$, akkor $\inf\{x_m, x_{m+1}, \ldots\} > -\infty$, tehát az (a_{m-1+i}) sorozat alulról korlátos, ekkor mivel (a_n) alulról nem korlátos, ezért k és m közötti valamelyik l indexre $x_l = -\infty$ kell hogy teljesüljön, ez azonban lehetetlen mivel $x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ típusú sorozat.

(b) eset: $\forall k \in \mathbb{N}^+ : a_k \in \mathbb{R}$

Ekkor két lehetőség van:

(1) (a_n) felülről korlátos $\Rightarrow \lim a \in \mathbb{R}$

(2) (a_n) felülről nem korlátos $\Rightarrow \lim a = \infty$

Tehát $\underline{\lim} x$ létezik és $-\infty \le \underline{\lim} x \le +\infty$

(B) $\overline{\lim} x$ *létezését* hasonlóan bizonyítjuk

(C) az egyenlőtlenség bizonyítása

(a) $\underline{\lim} x \in \mathbb{R}$, $\overline{\lim} x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (2) miatt teljesül

(b) $\underline{\lim} x = -\infty$ vagy $\overline{\lim} x = +\infty$ akkor szintén (2) miatt fennáll

(c) $\underline{\lim} x = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x = +\infty$

(d) $\overline{\lim} x = -\infty \Rightarrow \underline{\lim} x = -\infty$ □

5.15. TÉTEL:

Legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad \underline{\lim}\, x = A \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

$$H := \left\{ k \in \mathbb{N}^+ : x_k \le A - \varepsilon \right\}$$

ekkor

H véges.

BIZONYÍTÁS:

Az (1) miatt $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $k \in \mathbb{N}^+, \quad k > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < a_k \le A$.

Az a_k definíciója miatt $k > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < x_k$ is igaz.

Tehát $x_k \le A - \varepsilon$ csak $k \in \{1, \ldots, n_0\}$ esetekben állhat fenn. □

5.16. TÉTEL:

Legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad \overline{\lim}\, x = B \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

$$H := \left\{ k \in \mathbb{N}^+ : B + \varepsilon \le x_k \right\}$$

ekkor

H véges.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat. □

5.17. DEFINÍCIÓ:

Ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad c \in \hat{\mathbb{R}}$ és a

$$H_x(c, \varepsilon) := \left\{ k \in \mathbb{N}^+ : x_k \in B(c, \varepsilon) \right\}$$

$$\left(H_x(c, \varepsilon) = x^{-1}\left(B(c, \varepsilon) \cap R_x \right) \right)$$

halmaz $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén megszámlálhatóan végtelen számosságú,

akkor

c -t az x sorozat torlódási helyének nevezzük.

5.18. ÁLLÍTÁS:

Legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad c \in \hat{\mathbb{R}}$$

ekkor

$$c \text{ torlódási helye } x\text{-nek} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, y \quad részsorozata \quad x-nek, \quad hogy \\ \lim y = c \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló. □

5.19. MEGJEGYZÉS:

Ha

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, \quad c \in \hat{\mathbb{R}}$$

akkor

$+\infty$ torlódási helye x-nek $\Leftrightarrow$ x felülről nem korlátos

$-\infty$ torlódási helye x-nek $\Leftrightarrow$ x alulról nem korlátos.

BIZONYÍTÁS:

Nyilvánvaló.

5.20. TÉTEL:

Legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

ekkor

$\underline{\lim} x$ és $\overline{\lim} x$ torlódási helye x-nek és

ha c torlódási helye x-nek

akkor

$\underline{\lim}\, x \le c \le \overline{\lim}\, x$

BIZONYÍTÁS:

Mindkét állítás első részét bizonyítjuk.

Legyen $A := \underline{\lim}\, x$

1. eset: x alulról nem korlátos.

Ekkor $-\infty$ torlódási helye x-nek.

Ugyanakkor 5.14.-ben bizonyítottuk, hogy $a_k = -\infty \left(k \in \mathbb{N}^+\right)$, tehát $\underline{\lim}\, x_k = -\infty$.

A $\underline{\lim}\, x \le c$ nyilvánvalóan teljesül.

2. eset: x alulról korlátos.

Ekkor $\lim a = A \in \mathbb{R}$, vagy $\lim a = A = +\infty$.

(2.1) *Legyen* $A \in \mathbb{R}$

Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < a_n \le A$, mivel (a_n) monoton növekedő.

Az (a_n) definíciója miatt $a_k \le x_k$, így $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < x_n$.

Tegyük fel indirekt, hogy $c < A$, ahol c az x torlódási helye.

Legyen $\varepsilon = \frac{A-c}{2}$, ekkor $H_x\left(c, \frac{A-c}{2}\right)^{\#} = \mathbb{N}^{\#}$.

Mivel $\underline{\lim}\, x = A$ ezért az 5.15. miatt a $H := \left\{k \in \mathbb{N}^+ : x_k \le A - \frac{A-c}{2}\right\} = \left\{k \in \mathbb{N}^+ : x_k \le \frac{A+c}{2}\right\}$ halmaz számossága véges.

H_x értelmezéséből azonban következik, hogy $H_x\left(c, \frac{A-c}{2}\right) \subset H$.

Ez azonban ellentmondás.

Az előzőekből az is látható, hogy $H_x(A, \varepsilon)^{\#} = \mathbb{N}^{\#} \quad \left(\varepsilon \in \mathbb{R}^+\right)$ tehát A az x torlódási helye (hiszen $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < x_n$).

(2.2) *Legyen most* $a = +\infty$

Ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ : n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon$.

Így $x_n > \varepsilon \Rightarrow \lim x = +\infty \Rightarrow +\infty$ torlódási helye x-nek és más torlódási helye nincs.

Mivel $\lim(a_n) = +\infty$ ezért sem valós szám, sem $-\infty$ nem lehet egyenlő $\underline{\lim} x$-szel, így $\underline{\lim} x = +\infty$.

5.21. TÉTEL:

Legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

ekkor

$$\underline{\lim} x = \overline{\lim} x (= A) \Leftrightarrow x \text{ konvergens és } \lim x = A.$$

BIZONYÍTÁS:

(a) $\Rightarrow$

(b) Tegyük fel, hogy $\underline{\lim} x = \overline{\lim} x = A$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

(c) Ekkor a $H := \{k \in \mathbb{N}^+ : x_k \le A - \varepsilon\}$ és a

(d) $K := \{k \in \mathbb{N}^+ : A + \varepsilon \le x_k\}$ halmazok számossága véges, így $H \cup K$ is véges, tehát $n_0 := \max(H \cup K) \in \mathbb{N}^+$.

(e) Tehát $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow n \notin H, \quad n \notin K \Rightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$

(f) (b) $\Leftarrow$

(g) Tegyük fel, hogy x konvergens és $\lim x = A$, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow (x_n - A) < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$. Ekkor azonban $A - \varepsilon < a_n \le b_n < A + \varepsilon \Rightarrow \lim a = A, \quad \lim b = A \Rightarrow \underline{\lim} x = A, \quad \overline{\lim} x = A.$

6. NUMERIKUS SOROK

6.1. DEFINÍCIÓ:

legyen

$$\sum : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}, \quad x \mapsto \sum(x) := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)_{n \in \mathbb{N}^+}$$

A $\sum(x)$ sorozat a $\sum$ leképzés által az (x_n) számsorozathoz rendelt számsorozat, amelyet az (x_n) számsorozat elemeiből képzett numerikus sornak nevezünk és $\sum x$-szel jelölünk. Ha a $\sum(x)$ számsorozat konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) számsorozat elemeiből képezett $\sum x$ numerikus sor konvergens és összege "a".

Ezt így jelöljük:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{vagy} \quad a = \sum_{1}^{\infty} x_n$$

$$\left(a = \lim\left(\sum(x)\right) = \lim\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)_{n \in \mathbb{N}^+} \right)$$

6.2. MEGJEGYZÉS:

Előfordulhat, hogy az eredeti sorozat elemeit célszerű volna nullától indexezni. Ez azt jelenti, hogy nem $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, hanem $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ típusú függvényből indulunk ki. Ilyen esetben is értelmezzük a $\sum$ leképzést (értelemszerűen) és ekkor $\sum_0$ -val jelöljük.

6.3. TÉTEL:

A $\sum : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}$ leképzés bijekció.

6.4. MEGJEGYZÉS:

Az előző tétel miatt a valós és komplex sorozatokra vonatkozó definíciók és tételek természetesen a sorokra is érvényesek. Ezek közül a konvergenciót fogalmaztuk meg a 6.1.-ben és a továbbiakban néhány fontosabbat fogalmazunk meg. (Nem fogalmazzuk meg külön a divergenciát, a Canchy tulajdonságot, …)

6.5. TÉTEL:

legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

$\sum x$ konvergens

ekkor

$$\lim x = 0 .$$

BIZONYÍTÁS:

Mivel $\sum x$ konvergens, ezért a Canchy-féle konvergencia kritérium szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz létezik olyan $n_* \in \mathbb{N}^+$ hogy $n, m \in \mathbb{N}^+, \quad n_1 > m > n_*$ esetén

$$\left| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right| = \left| x_{m+1} + \ldots + x_n \right| < \varepsilon$$

legyen most $n := m + 1 > n_*$. Ekkor minden $n > n_0 := n_* + 1$ esetén

$$|x_1| < \varepsilon .$$

6.6. DEFINÍCIÓ:

ha

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

akkor legyen

$\sum x$ abszolút konvergens $\Leftrightarrow \sum |x|$ konvergens.

6.7. TÉTEL:

legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$

$\sum x$ abszolút konvergens

ekkor

$\sum x$ konvergens.

BIZONYÍTÁS:

$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad r_n := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

(r_n) konvergens $\Rightarrow (r_n)$ Canchy sorozat: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n, m \in \mathbb{N}^+ : n, m > n_0 \Rightarrow$.

$|r_n - r_m| < \varepsilon$. Legyen $n < m$.

ekkor $|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| = r_m - r_n < \varepsilon$.

Eszerint (s_n) Canchy sorozat $\Rightarrow (s_n)$ konvergens, mivel $\mathbb{R}$ teljes.

6.8. TÉTEL: (Majoráns kritérium)

legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$

$\alpha : \mathbb{N}^+ \to [0, \infty[$

ekkor

(1) $\left.\begin{array}{l} |x_n| \le \alpha_n \\ \sum \alpha \ konvergens \end{array}\right\} \Rightarrow \sum x$ abszolút konvergens

(2) $\left.\begin{array}{l} |x_n| \ge \alpha_n \\ \sum \alpha \ nem \ konvergens \end{array}\right\} \Rightarrow \sum x$ nem abszolút konvergens

BIZONYÍTÁS:

$\alpha : \mathbb{N}^+ \to [0, \infty[\Rightarrow \sum \alpha$ monoton növekedő

(1) $\sum\alpha$ konvergens $\Rightarrow \sum\alpha$ korlátos

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}^+ : \left(\sum\alpha\right)_n \le K \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sum 1\times 1\right)_n \le K \Rightarrow \sum|x|$ monoton növekedő, felülről korlátos $\Rightarrow \sum|x|$ konvergens.

(2) Tegyük fel indirekt, hogy $\sum x$ abszolút konvergens $\Rightarrow \sum|x|$ konvergens $\Rightarrow \sum|x|$ korlátos $\Rightarrow \sum\alpha$ korlátos $\Rightarrow \sum\alpha$ konvergens (mert $\sum\alpha$ monoton növekedő), ez azonban ellentmondás. □

6.9. PÉLDÁK:

(1) Ha $q \in \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n := q^n$, akkor a $\sum_0 x := \sum_0 q^n$ numerikus sort geometriai sornak nevezzük.

Ha $|q| < 1$ akkor $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Ha $|q| \ge 1$ akkor $\sum\left(q^n\right)$ nem konvergens.

(2) A $\sum\left(\frac{1}{n}\right)$ sort harmonikus sornak nevezzük.

A harmonikus sor divergens.

6.10. TÉTEL: (CAUCHY-FÉLE GYÖKKRITÉRIUM)

legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

ekkor

(1) $\overline{\lim}\left(|x_n|^{\frac{1}{n}}\right) < 1 \Rightarrow \sum x$ abszolút konvergens

(2) $\overline{\lim}\left(|x_n|^{\frac{1}{n}}\right) > 1 \Rightarrow \sum x$ divergens.

BIZONYÍTÁS:

(1) Legyen $a := \overline{\lim}\left(|x_n|^{\frac{1}{n}}\right)$ és $q \in]a, 1[$, ekkor véges sok n-től eltekintve

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} < q \Rightarrow |x_n| < q^n \Rightarrow \sum |x| \text{ konvergens.}$$

(2) A feltételből következik, hogy végtelen sok n-re $|x_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, ezért $\lim x$ vagy nem létezik, vagy nem egyenlő 0-val, ezért $\sum x$ nem konvergens. □

6.11. TÉTEL: (D'ALAMBERT-FÉLE HÁNYADOSKRITÉRIUM)

legyen

$$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ekkor

(1) $\overline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) < 1 \Rightarrow \sum x$ abszolút konvergens

(2) $\underline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) > 1 \Rightarrow \sum x$ divergens.

BIZONYÍTÁS:

(1) Legyen $a := \overline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ és $q \in]a, 1[$, ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < q \Rightarrow |x_{n+1}| < q|x_n| < \ldots < q^{n+1-n_0}\left|x_{n_0}\right| \Rightarrow \sum |x| \text{ konvergens.}$$

(2) Legyen $b := \underline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ és $q \in]1, b[$, ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > q \Rightarrow |x_{n+1}| > q^{n+1-n_0}\left|x_{n_0}\right| > \left|x_{n_0}\right|,$$ tehát $\lim x$ vagy nem létezik, vagy nem egyenlő 0-val $\Rightarrow \sum x$ nem konvergens. □

6.12. MEGJEGYZÉS:

ha

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ és

$\overline{\lim}\left(|x_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 1$ vagy

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és

$\underline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) \le 1$ vagy $1 < \overline{\lim}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$

akkor

$\sum x$ konvergenciája csak további vizsgálattal dönthető el.

6.13. TÉTEL:

legyen

$x : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ monoton fogyó és

$\lim(x_n) = 0$

ekkor az

$\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_n\right)$ sor konvergens.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat.

7. FOLYTONOSSÁG

7.1. DEFINÍCIÓ:

Ha

f valós függvény

$x_0 \in D_f$, és

minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$x \in D_f, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (*)$

akkor

f-et az $x_0 \in D_f$ pontban folytonosnak nevezzük és ezt az $f \in C[x_0]$ jellel jelöljük.

7.2. MEGJEGYZÉS:

Nyilvánvaló, hogy $(*)$ átfogalmazható:

$f(B(x_0, \delta)) \cap D_f \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ vagy

$B(x_0\ \delta) \cap D_f \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$.

7.3. MEGJEGYZÉS:

1. A definícióból következik, hogy egy függvény csak az értelmezési tartományának valamely pontjában lehet folytonos.
2. Az $f \in C[x_0]$ jel tehát azt jelenti, hogy:

   $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $x_0 \in D_f$

   f folytonos x_0-ban.

7.4. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ekkor

$f \in C[x_0] \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$x, y \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

BIZONYÍTÁS: $\Rightarrow$

Legyen $f \in C[x_0]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ekkor

$\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$u \in B(x_0, \delta) \cap D_f |f(u) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Legyen $x, y \in B(x_0, \delta) \cap D_f$, ekkor

$u = x$ és $u = y$ szereposztással:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

$\Leftarrow$

Legyen $y := x_0$.

7.5. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \left(D_f \cap]-\infty, x_0]\right)' \cap D_f$

akkor

f balról folytonos x_0-ban $\Leftrightarrow f/D_f \cap]-\infty, x_0] \in C[x_0]$.

Ezt $f \in C_-[x_0]$-val jelöljük.

7.6. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x_0 \in \left(D_f \cap [x_0, \infty[\right)' \cap D_f$$

akkor

f jobbról folytonos x_0-ban $\Leftrightarrow f/D_f \cap [x_0, \infty[\in C[x_0]$.

Ezt $f \in C_+[x_0]$-val jelöljük.

7.7. ÁLLÍTÁS:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in D_f^0$$

akkor

$f \in C[x_0] \Leftrightarrow f \in C_-[x_0]$ és $f \in C_+[x_0]$.

BIZONYÍTÁS:

7.8. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$A \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

akkor

x_0 izolált pontja A-nak $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+$

$$B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}.$$

7.9. ÁLLÍTÁS:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 izolált pontja D_f-nek

ekkor

$f \in C[x_0]$.

BIZONYÍTÁS:

7.10. MEGJEGYZÉS:

Az előző állítás szerint bármely véges (számosságú) halmazon értelmezett valós függvény és bármely valós számsorozat folytonos.

7.11. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in D_f$$

ekkor

$$f \in C[x_0] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \varepsilon \in \mathbb{R}^{N^+} \\ R_x \in D_f \\ \lim x = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f \circ x = f(x_0)$$

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Legyen $f \in C[x_0]$ és $x \in \mathbb{R}^{N^+}$ olyan, hogy $R_x \subset D_f$ és $\lim x = x_0$.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $y \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow f(y) \in B(f(x_0), \varepsilon)$

$\lim x = a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0$ esetén $x_n \in B(x_0, \delta)$

$R_x \subset D_f$ miatt $x_n \in D_f$ ezért $n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0$ esetén $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

$\Leftarrow$

Tegyük fel indirekt, hogy $\left.\begin{array}{c} x \in \mathbb{R}^{N^+} \\ R_x \subset D_f \\ \lim x = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f \circ x = f(x_0)$ és mégis $f \notin C[x_0]$.

Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ hogy $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ esetén $\exists y \in B(x_0, \delta) \cap D_f$, amelyre $|f(y) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ áll fenn.

Mivel $\delta \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, ezért legyen $\delta := \frac{1}{n}$, a hozzá tartozó y pedig legyen x_n.

Így tehát $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\exists x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap D_f$, hogy $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Legyen $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$. Ez az x sorozat olyan amelyre igaz, hogy $R_x \subset D_f$ és $\lim x = x_0$, ugyanakkor $\lim(f(x_n)) \neq f(x_0)$.

7.12. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in D_f \cap D_f'$$

ekkor

$$f \in C[x_0] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \varepsilon \in \mathbb{R}^{N^+} \\ R_x \in D_f - \{x_0\} \\ \lim x = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f \circ x = f(x_0).$$

BIZONYÍTÁS:

Ha $x_0 \in D_f \cap D_f'$, akkor

$f \in C[x_0] \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$y \in (B(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap D_f \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ezek után az előző tétel bizonyítása megismételhető.

7.13. TÉTEL:

Legyen

$$f \in C[x_0]$$

$$y_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) > y_0 \left[f(x_0) < y_0\right]$$

ekkor

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow f(x) > y_0 \qquad \left[f(x) < y_0\right]$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$\varepsilon \in]0, f(x_0) - y_0[$, ekkor $f \in C[x_0]$ miatt

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon < f(x_0) - y_0$.

Ezért $-(f(x_0) - y_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0) - y_0$

$$\Downarrow$$

$$y_0 < f(x)$$

7.14. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D_f$

$f(x_0) > 0 \qquad [f(x_0) < 0]$

akkor

f az x_0-ban $\qquad$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\Leftrightarrow$$

lokálisan jeltartó $\qquad$ $x \in B(x_0, \varepsilon) \cap D_f \Rightarrow f(x) > 0 \quad [f(x) < 0]$

7.15. KÖVETKEZMÉNY:

Legyen

$f \in C[x_0]$ és $f(x_0) \neq 0$

ekkor

f lokálisan jeltartó x_0-ban.

BIZONYÍTÁS:

7.16. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D_f \cup D_f'$

akkor

f az x_0-ban $\quad \exists k \in \mathbb{R}^+, \quad \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$\Leftrightarrow$

lokálisan korlátos $\quad \forall x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x)| < k$

7.17. TÉTEL:

Legyen

$$f \in C[x_0]$$

ekkor

f lokálisan korlátos x_0-ban.

BIZONYÍTÁS:

$f \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1$.

Legyen $k := |f(x_0)| + 1$.

Ekkor $x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x)| < k$.

7.18. TÉTEL:

Legyen

$$f \in C[x_0]$$

ekkor

$$|f| \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$f \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Minden $x, x_0 \in D_f$ esetén $\big||f|(x) - |f|(x_0)\big| = \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \le |f(x) - f(x_0)|$,

ezért

$x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow \big||f|(x) - |f|(x_0)\big| < \varepsilon$.

7.19. TÉTEL:

Legyen

$$g \in C[x_0],\ g(x_0) \neq 0$$

ekkor

$\frac{1}{g}$ az x_0 pontban lokálisan korlátos.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\varepsilon \in \left]0, \frac{|g(x_0)|}{2}\right[$.

Az előző állítás szerint $|g| \in C[x_0]$, ezért $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$,

hogy $x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow \big||g|(x) - |g|(x_0)\big| < \varepsilon$, vagyis

$$-\frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)| - |g(x_0)|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)|$$

Legyen $k := \frac{2}{|g(x_0)|}$, ekkor

$$x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < k.$$

7.20. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$X, Y \subset \mathbb{R},\quad x_0 \in X$$

akkor

$X \overset{x_0}{\subset} Y \Leftrightarrow \exists U$ környezete x_0-nak $U \cap X \subset U \cap Y$.

(X az x_0 pontban lokálisan szűkebb Y-nál).

7.21. TÉTEL:

Legyen

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \in C[x_0]$

$D_f \overset{x_0}{\subset} D_g \left(\Leftrightarrow \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ : B(x_0, \delta_1) \cap D_f \subset B(x_0, \delta_1) \cap D_g\right)$

$\exists \delta_2 \in]0, \delta_1[$ és $k \in \mathbb{R}^+$, hogy

$x \in B(x_0, \delta_2) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq k|g(x) - g(x_0)|$

ekkor

$f \in C[x_0]$.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

$g \in C[x_0]$ miatt $\frac{\varepsilon}{k}$-hoz $\exists \delta \in]0, \delta_2[\subset \mathbb{R}^+$, hogy

$x \in B(x_0, \delta) \cap D_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{k}$

$\delta < \delta_1$ miatt $x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq k|g(x) - g(x_0)| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

7.22. MEGJEGYZÉS:

Az előző tételt „pontbeli folytonosságra vonatkozó majoráns kritérium”-nak nevezik.

A $g := j$ speciális esetet pedig az x_0 pontra vonatkozó Lipschitz-féle korlátos feltételnek nevezzük.

$x \in B(x_0, \delta_2) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < k|x - x_0|$.

7.23. ÁLLÍTÁS:

Legyen

$f \in C[x_0]$

$A \subset D_f, \quad x_0 \in A$

ekkor

$$f/A \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

7.24. TÉTEL:

Legyen

$$g \in C[x_0]$$

$$f \in C[g(x_0)]$$

ekkor

$$f \circ g \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$f \in C[g(x_0)] \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $y \in B(g(x_0), \delta') \cap D_f \Rightarrow f(y) \in B(f(g(x_0)), \varepsilon)$

$g \in C[(x_0)] \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in B(x_0, \delta) \cap D_g \Rightarrow g(x) \in B(g(x_0), \delta')$

$D_{f \circ g} \subset D_g \Rightarrow B(x_0, \delta) \cap D_{f \circ g} \subset B(x_0, \delta) \cap D_g$,

ezért

$x \in B(x_0, \delta) \cap D_{f \circ g} \Rightarrow f(g(x)) \in B(f(g(x_0)), \varepsilon)$

vagyis

$(f \circ g)(\ ) \in B((f \circ g)(x_0), \varepsilon).$

7.25. TÉTEL:

Legyen

$$f \in C[x_0], \quad C \in \mathbb{R}$$

ekkor

$$cf \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

Ha $c = 0$, akkor nyilvánvaló.

Ha $c \neq 0$, akkor $D_{cf} \overset{x_0}{\subset} D_f$ és $|(cf)(x) - (cf)(x_0)| \leq |c||f(x) - f(x_0)|$, ebből a folytonosságra vonatkozó majoráns kritérium szerint következik az állítás. □

7.26. TÉTEL:

Legyen

$$f, g \in C[x_0]$$

ekkor

$$f + g \in C[x_0], \text{ és } f \cdot g \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

(1) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$f \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } x \in B(x_0, \delta_1) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$g \in C[(x_0)] \Rightarrow \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } x \in B(x_0, \delta_2) \cap D_f \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Ekkor $x \in B(x_0, \delta) \cap D_f \cap D_g \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| =$

$$= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Legyen $x \in D_f \cap D_g$, ekkor

$$(fg)(x) - (fg)(x_0) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$g \in C[x_0] \Rightarrow g$ lokálisan korlátos x_0-ban $\Leftrightarrow \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ és hogy

$x \in B(x_0, \delta') \cap D_g \Rightarrow |g(x)| < k'$.

Legyen $k := \max\{k', |f(x_0)|\}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

$$f \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } x \in B(x_0, \delta_1) \cap D_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

$$g \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } x \in B(x_0, \delta_2) \cap D_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta'\}$, ekkor

$$x \in B(x_0, \delta) \cap D_{fg} \Rightarrow |(fg)(x) - (fg)(x_0)| \leq k(|f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|) <$$

$$< k\left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k}\right) = \varepsilon \ .$$

7.27. TÉTEL:

Legyen

$$g \in C[x_0], \quad g \in C[x_0] \Rightarrow g$$

ekkor

$$\frac{1}{g} \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

$g(x_0) \neq 0, \quad g \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in B(x_0, \delta) \cap D_g \Rightarrow g(x) \neq 0$ és

$\exists k' \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in B(x_0, \delta) \cap D_g \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right| < k'$.

Legyen $x \in B(x_0, \delta) \cap D_g$, ekkor $\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = -\frac{1}{g(x)g(x_0)}(g(x) - g(x_0))$.

Legyen $k := \frac{k'}{|g(x_0)|}$, ekkor $D_{\frac{1}{g}} \overset{x_0}{\subset} D_g$ és $x \in B(x_0, \delta) \cap D_{\frac{1}{g}}$ esetén

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)\right| \leq k|g(x) - g(x_0)| \ .$$

Mivel $g \in C[x_0]$, ezért a folytonosságra vonatkozó majoráns alapján következik az állítás. □

7.28. TÉTEL:

Legyen

$$f \in C[x_0], \quad g \in C[x_0], \quad g(x_0) \neq 0$$

ekkor

$$\frac{f}{g} \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

7.29. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

akkor

f folytonos $\Leftrightarrow \forall x_0 \in D_f : f \in C[x_0]$. (Ezt $f \in C$-vel jelöljük.)

7.30. TÉTEL:

Legyen

$$f, g \in C$$

ekkor

$$A \subset D_f, \quad A \neq \emptyset \Rightarrow f/A \in C$$

$$g^{-1}(R_g \cap D_f) \neq \emptyset \Rightarrow f \circ g \in C$$

$$D_f \cap D_g \neq \emptyset \Rightarrow f + g, f \cdot g \in C$$

$$\{x \in D_g : g(x) \neq 0\} \neq \emptyset \Rightarrow \frac{1}{g} \in C$$

$$D_f \cap D_{\frac{1}{g}} \neq \emptyset \Rightarrow \frac{f}{g} \in C.$$

BIZONYÍTÁS:

7.31. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$A \subset D_f, \quad A \neq \emptyset$$

akkor

f folytonos A-n $\Leftrightarrow f/A \in C$. (Ezt $f \in C(A)$-val jelöljük.)

7.32. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ekkor

$$f \in C \Leftrightarrow \left(\begin{Bmatrix} H \subset \mathbb{R} \\ H \text{ nyílt} \end{Bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(H) \text{ nyílt.} \right)$$

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Legyen $f \in C$ és $H \subset \mathbb{R}$ nyílt.

Ha $f^{-1}(H) = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, ezért tegyük fel, hogy $f^{-1}(H) = \emptyset$.

Legyen $x_0 \in f^{-1}(H), \quad y_0 = f(x_0) \in H.$

Mivel $y_0 \in H$ és H nyílt, ezért $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $B(y_0, \varepsilon) \subset H.$

Mivel $f \in C$ ezért $f \in C[x_0]$, tehát a fenti ε-hoz is $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$

Ekkor azonban $y_0 = f(x_0)$ miatt $f^{-1}\ f(B(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(H)$

$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(H)$, tehát x_0 belső pontja $f^{-1}(H)$-nak, és mivel x_0 tetszőleges, ez igazolja az állítást.

$\Leftarrow$

Tegyük fel, hogy, ha $H \subset \mathbb{R}, \quad H$ nyílt $\Rightarrow f^{-1}(H)$ nyílt.

Legyen $x_0 \in D_f$ és $y_0 = f(x_0), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ekkor $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ is nyílt, ezért $x_0 \in f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ miatt $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$, tehát f folytonos x_0-ban.

Mivel $x_0 \in D_f$ tetszőleges volt, ezért $f \in C$.

7.33. DEFINÍCIÓ:

Ha

$Y \subset \mathbb{R}$ és

$\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ egy indexelt halmazrendszer

akkor

$\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ lefedi Y-t $\Leftrightarrow Y \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. (Azt is mondjuk, hogy A_γ egy lefedése Y-nak.)

Ha

$\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ elemei nyílt halmazok

akkor

Y egy nyílt lefedését adják.

7.34. DEFINÍCIÓ:

Ha

$X \subset \mathbb{R}$

akkor

X kompakt $\Leftrightarrow$ X minden nyílt lefedéséből kiválasztható egy véges nyílt lefedés.

7.35. HEINE-BOREL tétel:

Legyen

$X \subset \mathbb{R}$

akkor

X kompakt $\Leftrightarrow$ X korlátos és zárt.

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

(1) X zárt ($\Leftrightarrow \mathbb{R} - x$ nyílt)

Feltehetjük, hogy $X \neq \emptyset$, ellenkező esetben ugyanis az állítás nyilvánvaló.

Legyen $x_0 \in \mathbb{R} - X$.

Ekkor $\exists y \in X$ és $\gamma_{x_0}, \gamma_y \in \mathbb{R}^+$, hogy $B(x_0, \gamma_{x_0}) \cap B(y, \gamma_y) = \varnothing$.

$X \subset \bigcup_{y \in X} B(y, \gamma_y)$.

Mivel X kompakt: $\exists y_k \in X \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$, hogy $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \gamma_{y_k})$.

Legyen $\gamma_0 := \min\{\gamma_{x_{0_1}}, \gamma_{x_{0_2}}, \ldots, \gamma_{x_{0_n}}\}$, ekkor $B(x_0, \gamma_0) \cap B(y_k, \gamma_{y_k}) = \varnothing$.

$B(x_0, \gamma_0) \cap X = \varnothing$.

$B(x_0, \gamma_0) \cap \mathbb{R} \setminus X$, tehát $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus X$ -hez $\exists \gamma_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $B(x_0, \gamma_0) \subset \mathbb{R} \setminus X$, így $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus X)^0 \Rightarrow \mathbb{R} \setminus X$ nyílt $\Rightarrow X$ zárt.

(2) X korlátos

$m := \min\{y_k - \gamma_{y_k} : k = 1, \ldots, n\}$

$M := \max\{y_k + \gamma_{y_k} : k = 1, \ldots, n\}$

$\Leftarrow$

X korlátos $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : a < b,\ X \subset [a, b]$.

Könnyen belátható, hogy kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt, így elegendő $[a,b]$ kompaktságát megmutatni.

Tegyük fel indirekt, hogy $[a,b]$ nem kompakt, ekkor $\exists A_i \subset \mathbb{R}$ nyílt, hogy $[a, b] \subset \bigcup_{C \in I} A_i$ és

véges sok A_i nem fedi le $[a,b]$-t.

Legyen $[\alpha_0, \beta_0] = [a, b]$ és $[\alpha_n, \beta_n] \in \left\{ \left[\alpha_{n-1}, \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2} \right], \left[\frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2}, \beta_{n-1} \right] \right\}$ úgy, hogy $[\alpha_n, \beta_n]$ nem fedhető le véges sok A_i-vel.

Ekkor Cantor tétele szerint:

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \bigcap_{n=0}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] = \{x_0\} \Rightarrow x_0 \in [a, b] \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x_0 \in A_{i_0}$.

Mivel A_{i_n} nem nyílt $\mathbb{R}$-ben: $\exists r \in \mathbb{R}^+ :]x_0 - r, x_0 + r[\subset A_{i_0}$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+ : [\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}] \subset]x_0 - r, x_0 + r[\Rightarrow [\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}] \subset A_{i_0}$, ez azonban ellentmond annak, hogy $[a, b]$ nem fedhető le véges sok A_i-vel.

7.36. BOLZANO tétele:

Legyen

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad f \in C[a, b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

ekkor

$\exists c \in]a, b[$, hogy

$f(c) = 0$.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt, hogy $\forall x \in [a, b]$ esetén $f(x) \neq 0$. $[a_1, b_1]$ legyen $[a, b]$-nek az a fele, amelyre $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, és így tovább. Azt kapjuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén: $[a_n b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ és $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \quad b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$.

Alkalmazva a Cantor-féle közösrész tételt: $(a_n), \quad (b_n), \quad c := \lim(a_n) = \lim(b_n)$.

Nyilvánvaló, hogy $C \in [a, b]$ és a feltevés szerint $f(c) \neq 0$.

$f \in C[c] \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

vagy $\quad f(B(c, \delta) \cap [a, b]) \subset \mathbb{R}^+$, vagy

$f(B(c, \delta) \cap [a, b]) \subset \mathbb{R}^-$ és mivel

$\lim(a_n) = \lim(b_n) = C$, ezért $\delta \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy $\exists n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0$ esetén

$a_n \in B(c, \delta) \cap [a, b]$

$b_n \in B(c, \delta) \cap [a, b]$.

7.37. TÉTEL:

Legyen

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad f \in C[a, b]$

ekkor

$\forall d \in [f(a), f(b)]$ esetén $\exists C \in [a, b]$, hogy $f(c) = d$.

BIZONYÍTÁS:

Az $f(a) = f(b)$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy $f(a) \neq f(b)$.

Legyen $d \in]]f(a), f(b)[[$, ekkor a $\varphi := f - d(\cdot) \in C$, másrészt

$\varphi(a) = f(a) - d$ és $\varphi(b) = f(b) - d$ miatt $\varphi(a)\varphi(b) < 0$, így az előző tétel szerint van olyan $c \in]a, b[$, amelyre $\varphi(c) = 0$, vagyis $\varphi(c) = j(c) - d = 0$.

7.38. MEGJEGYZÉS:

Az előző tétel így is megfogalmazható:

$f \in C[a, b] \Rightarrow [[f(a), f(b)]] \subset f([a, b])$.

7.39. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$D_f^0 \neq \emptyset$

akkor

f Darboux tulajdonságú $\Leftrightarrow \forall [a, b] \subset D_f : [[f(a), f(b)]] \subset f([a, b])$.

7.40. MEGJEGYZÉS:

Az előző tétel így is megfogalmazható:

Ha valamely valós függvény értelmezési tartományának van belső pontja, és folytonos, akkor Darboux-tulajdonságú.

7.41. TÉTEL:

Legyen

$A \subset \mathbb{R}$

ekkor

az intervallum $\Leftrightarrow \forall a, b \in A : [[a, b]] \subset A$.

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Legyen A intervallum, $a, b \in A$, akkor az intervallum értelmezéséből következik az állítás.

$\Leftarrow$

Tegyük fel, hogy $\forall a, b \in A : [\![a, b]\!] \subset A$.

Legyen $\alpha := \inf A, \quad \beta := \sup A$.

Ekkor

$$]\alpha, \beta[\subset A \subset [\alpha, \beta].$$

A második tartalmazás nyilvánvaló. Az első a következő módon látható be:

Legyen $x \in]\alpha, \beta[\Rightarrow \exists y \in]\alpha, x[, z \in]x, \beta[$, hogy $y, z \in A$.

Ekkor azonban $[y, z] \subset A$, és mivel $x \in]y, z[$, ezért $]\alpha, \beta[\subset A$.

Így A az $]\alpha, \beta[, [\alpha, \beta[,]\alpha, \beta], [\alpha, \beta]$ intervallumok valamelyikével egyenlő.

7.42. TÉTEL:

Legyen

I intervallum,

$f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő

ekkor

$f \in C \Leftrightarrow R_f$ intervallum.

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Ha f folytonos, akkor Darboux tulajdonságú, így $y, z \in R_f$ esetén $[\![y, z]\!] = [\![f(f^{-1}(y)), f(f^{-1}(z))]\!] \subset R_f$, így az előző állítás szerint R_f intervallum.

$\Leftarrow$

Tegyük fel, hogy R_f intervallum.

Legyen $a \in D_f, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha := \inf f^{-1}(B(f(a), \varepsilon); \quad \beta := \sup f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)$.

Mivel f szigorúan monoton növekedő, ezért felvesz $f(a)$-tól különböző értéket is.

Mivel R_f intervallum, ezért ebből következik, hogy $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)$ nem állhat egyetlen pontból, vagyis alkalmaz ε mellett $\beta - \alpha > \in \mathbb{R}^+$.

Legyen $\delta := \begin{cases} \min\{a-\alpha, \beta-a\}, & ha \quad a \in]\alpha, \beta[\\ a-a, & ha \quad a = \beta \\ \beta-a, & ha \quad a = \alpha \end{cases}$.

Ekkor $\delta \in \mathbb{R}^+$ és $B(a, \delta) \cap I \subset]\alpha, \beta[$. Innen $f(B(a, \delta) \cap I) \subset f(]\alpha, \beta[) \subset B(f(a), \varepsilon)$,

vagyis $f \in C[a]$.

Mivel $a \in I$ tetszőleges volt, így $f \in C$.

(Hasonló tétel érvényes szigorúan monoton csökkenő függvény esetén is.)

7.43. TÉTEL:

Legyen

$f \in C[a]$ kompakt, $f \in C(A)$

ekkor

f/A korlátos.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt, hogy f/A nem korlátos.

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$-hoz $\exists x_n \in A : |f(x_n)| > n$.

Legyen $x := (x_n)$.

$R_x \subset A, \quad A$ kompakt $\Rightarrow$ korlátos, tehát a $\Rightarrow$ féle kiválasztási tétel szerint $\exists i$ indexsorozat, hogy $x \circ i$ konvergens.

Legyen $a := \lim(x \circ i)$.

A kompakt $\Rightarrow$ zárt $\Rightarrow$ $a \in A$.

$f \in C[a]$ miatt a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f \circ (x \circ i)$ konvergens $(\lim f \circ (x \circ i) = f(a))$ és így korlátos is.

Ez azonban ellentmond az $|f(x_{in})| > i_n \geq n$ feltételnek.

7.44. WEIERSTRASS tétele:

Legyen

$A \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f \in C(A)$

ekkor

f/A-nak van abszolút minimuma és abszolút maximuma.

BIZONYÍTÁS:

Az abszolút maximum létezését bizonyítjuk, a minimum hasonlóan bizonyítható.

Az előző tétel szerint f/A korlátos.

Legyen $M := \sup f(A) = \sup f/A$.

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\exists x_n \in A : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$.

Legyen $x := (x_n)$.

Mivel $R_x \subset A$ és A kompakt, tehát korlátos is, ezért a B-W féle tétel szerint $\exists i$ index sorozat, hogy $x \circ i$ konvergens.

Legyen $a := \lim x \circ i$.

Az A halmaz kompakt, tehát zárt $\Rightarrow a \in A$.

Mivel $\left(\left|f(x_{i_n}) - M\right|\right) \leq \left(\frac{1}{i_n}\right) \leq \left(\frac{1}{n}\right)$ ezért $\lim f \circ (x \circ i) = M$. Másrészt $f \in C[a]$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt $\lim f \circ (x \circ i) = f(a)$.

Tehát $f(a) = M (= \sup f/A)$.

7.45. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad A \subset D_f, \quad A \neq \emptyset$

akkor

f egyenletesen folytonos A-n $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ha

$A = D_f$

akkor

f -et egyenletesen folytonosnak nevezzük.

7.46. TÉTEL:

Legyen

$A \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f \in C(A)$

ekkor

f egyenletesen folytonos A-n.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt, hogy f/A nem egyenletesen folytonos. Ekkor $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\exists x_n \cdot I_n \in A$, hogy $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és $|f(x_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon$.

Legyen $x := (x_n)$. Mivel $R_x \subset A$, A kompakt $\Rightarrow$ korlátos, ezért a B-W féle kiválasztási tétel szerint van olyan i indexsorozat, hogy $x \circ i$ konvergens. Legyen $a := \lim x \circ i$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|y_{i_n} - a| \leq |y_{i_n} - x_{i_n}| + |x_{i_n} - a| \leq \frac{1}{i_n} + |x_{i_n} - a|$. Mivel $\left(\frac{1}{i_n}\right)$ és $(|x_{i_n} - a|)$ nullsorozat, $(|y_{i_n} - a|)$ is az. Tehát $\lim y \circ i = a$. $f \in C[a] \Rightarrow \lim f \circ (x \circ i) = \lim f \circ (y \circ i) = f(a)$.

Így azonban $f \circ (x \circ i) - f \circ (y \circ i)$ nullsorozat.

Ez pedig ellentmond $|f(x_{i_n}) - f(y_{i_n})| \geq \varepsilon$ -nak.

8. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

8.1. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in D_f'$

ekkor

legfeljebb egy olyan $A \in \mathbb{R}$ van, amelyre igaz, hogy $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $f\left(B(a, \delta) - \{a\}\right) \subset B(A, \varepsilon)$.

BIZONYÍTÁS:

8.2. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in D_f'$

$\exists A \in \mathbb{R}$, amelyre igaz, hogy $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $f\left(B(a, \delta) - \{a\}\right) \subset B(A, \varepsilon)$

akkor

A-t az f függvény $a \in \mathbb{R}$ pontbeli határértékének nevezzük és

$\lim_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim_{a} f$ jellel jelöljük.

8.3. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in D_f \cap D_f'$

ekkor

$$f \in C[a] \Leftrightarrow \exists \lim_a f \quad \text{és} \quad \lim_a f = f(a).$$

BIZONYÍTÁS:

8.4. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$a \in D_f'$$

ekkor

$$\exists \lim_a f \quad \text{és} \quad \lim_a f = A \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+} : \left.\begin{matrix} R_x \subset D_f - \{a\} \\ \lim x = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim f \circ x = A .$$

BIZONYÍTÁS:

8.5. TÉTEL:

Legyen

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$a \notin D_f, \quad a \in D_f$$

$$\lim_a f = b$$

$$b \notin R_f, \quad b \notin D_g, \quad b \in D_g'$$

$$\lim_b g = c, \quad h := g \circ f$$

ekkor

$$\exists \lim h \quad \text{és} \quad \lim_a h = c .$$

BIZONYÍTÁS:

8.6. TÉTEL:

Legyen

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad a \in D_f' \cap D_g'$$

$$\exists A = \lim_a f, \quad \exists B = \lim_a g$$

ekkor

$$\exists \lim_a (c f + d g) \quad \text{és} \quad \lim_a (c f + d g) = c \cdot A + d \cdot B$$

$$\exists \lim_a (f \cdot g) \quad \text{és} \quad \lim_a (f \cdot g) = A \cdot B .$$

Ha $A \neq 0$, akkor $\exists \lim_a \frac{1}{f}$ és $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{A}$.

BIZONYÍTÁS:

8.7. TÉTEL:

Legyen

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$a \in D_f' \cap D_g'$$

$$\exists A = \lim_a f, \quad \exists B = \lim_a g$$

ekkor

$$A \neq 0 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+ : x \in B(a,r) - \{a\} \text{ esetén } \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(A)$$

$$A < B \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+ : x \in B(a,r) - \{a\} \text{ esetén } f(x) < g(x)$$

$$x \in D_f - \{a\} \text{ esetén } f(x) \leq g(x) \Rightarrow A \leq B .$$

BIZONYÍTÁS:

8.8. TÉTEL:

Legyen

$$f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$a \in D_f' \cap D_g' \cap D_h'$

$\exists \lim_a f, \quad \exists \lim_a h, \quad \lim_a f = \lim_a h =: A$

$x \in D_f \cap D_g \cap D_h - \{a\}$ esetén $f(x) \le g(x) \le h(x)$

ekkor

$\exists \lim_a g$ és $\lim_a g = A$.

BIZONYÍTÁS:

8.9. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in D_f'$

$\exists r \in \mathbb{R}^+ :]a - r, a[\subset D_f$

$g = f|_{]a-r, a[}$

$\exists A = \lim_a g$

akkor

A-t az f függvény $a \in \mathbb{R}$ pontbeli baloldali határértékének nevezzük és a

$\lim_{x \to a-0} f(x), \quad \lim_{a-0} f, \quad f(a-0)$ jelek valamelyikével jelöljük.

8.10. MEGJEGYZÉS:

A fentihez hasonló a jobboldali határérték definíciója, amelynek jelölése:

$\lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{a+0} f, \quad f(a+0)$ lehet.

8.11. TÉTEL:

Legyen

$a \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}^+$

$$f :]a-r, a[\ \cup \ ]a, a+r[\to \mathbb{R}$$

ekkor

$$\exists \lim_a f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \lim_{a+0} f, \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \lim_{a+0} f = \lim_{a-0} f = A .$$

BIZONYÍTÁS:

8.12. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$a \in D_f', \quad a \notin D_f$$

akkor

$$\lim_a f = +\infty \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez } \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy}$$

$$x \in B(a, \delta) \cap D_f \Rightarrow K < f(x)$$

$$\lim_a f = -\infty \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez } \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy}$$

$$x \in B(a, \delta) \cap D_f \Rightarrow f(x) < K .$$

Ha még $\exists r \in \mathbb{R}^+$, hogy $]a-r, a+r[\subset D_f$,

akkor

$$\lim_{a-0} f = +\infty \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez } \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy}$$

$$x \in]a-\delta, a[\cap]a-r, a[\Rightarrow K < f(x)$$

$$\lim_{a-0} f = -\infty \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez } \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy}$$

$$x \in]a-\delta, a[\cap]a-r, a[\Rightarrow f(x) < K$$

$$\lim_{a+0} f = +\infty \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez } \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy}$$

$$x \in]a, a+\delta[\cap]a, a+r[\Rightarrow K < f(x)$$

$$\lim_{a+0} f = -\infty \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall K \in \mathbb{R} \text{-hez } \exists \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy}$$

$$x \in]a, a+\delta[\cap]a, a+r[\Rightarrow f(x) < K \ .$$

8.13. TÉTEL:

Legyen

$$f \in I\!R \to I\!R$$

$$a \in D_f^{'}, \quad a \notin D_f$$

ekkor

$$\lim f = +\infty \Leftrightarrow \forall x \in I\!R^{N^+}, \quad R_x \subset D_f, \quad \lim x = a \text{ esetén } \lim f \circ x = +\infty \ .$$

BIZONYÍTÁS:

8.14. TÉTEL:

Legyen

$$f \in I\!R \to I\!R$$

$$a \in D_f^{'}, \quad a \notin D_f$$

$$x \in D_f - \{a\} \Rightarrow f(x) \neq 0$$

ekkor

$$\lim_a |f| = +\infty \Rightarrow \lim_a \frac{1}{f} = 0$$

$$f > 0, \quad \lim_a f = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{f} = +\infty \ .$$

BIZONYÍTÁS:

8.15. TÉTEL:

Legyen

$$a \in I\!R, \quad r \in I\!R^+$$

$$f :]a-r, a[\cup]a, a+r[\to I\!R$$

ekkor

$$\lim_{a} f = +\infty \Leftrightarrow \lim_{a-0} f = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} f = +\infty .$$

BIZONYÍTÁS:

8.16. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

D_f felülről nem korlátos

akkor

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ - hoz \quad \exists K \in \mathbb{R}, \quad hogy \\ x \in D_f, \quad x > K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \end{array}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ helyett néha $\lim_{\infty} f$ -et írunk.

Hasonló $a - \infty$-beli határérték definíciója is.

8.17. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

D_f felülről nem korlátos

ekkor

$$\lim_{+\infty} f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{N^+}, \quad R_x \subset D_f, \quad \lim x = +\infty \text{ esetén } \lim f \circ x = A .$$

BIZONYÍTÁS:

8.18. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

D_f alulról nem korlátos

Akkor

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ - hoz \quad \exists K \in \mathbb{R}, \quad hogy \\ x \in D_f, \quad x < K \Rightarrow \varepsilon < f(x). \end{array}$$

Hasonló tételt és definíciókat lehet megfogalmazni a többi esetre is.

8.19. TÉTEL:

Legyen

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő

ekkor

$$\exists \lim_{a+0} f, \quad \exists \lim_{b-0} f \quad \text{és} \quad c \in]a, b[\Rightarrow \exists \lim_{c-0} f, \quad \exists \lim_{c+0} f \quad \text{és} \quad \lim_{c-0} f \le f(c) \le \lim_{c+0} f .$$

BIZONYÍTÁS:

8.20. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in D_f$

ekkor

$f \notin C[a] \Leftrightarrow$ az $a \in \mathbb{R}$ szám az f szakadási helye.

Ha még

$a \in D_f'$ és

$\exists \lim_{a} f$ de $\lim_{a} f \neq f(a)$

akkor

az $a \in \mathbb{R}$ számot megszüntethető szakadási helynek nevezzük.

Ha

$\exists \lim_{a} f$ és $\exists \lim_{a-0} f, \quad \exists \lim_{a+0} f, \quad \lim_{a-0} f \neq \lim_{a+0} f$

akkor

az $a \in \mathbb{R}$ számot elsőfajú szakadási helynek nevezzük.

Ha

$\nexists \lim_{a-0} f$ vagy $\nexists \lim_{a+0} f$

akkor

az $a \in \mathbb{R}$ számot másodfajú szakadási helynek nevezzük.

8.21. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomfüggvény

ekkor

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{a} f$ és $\lim_{a} f = f(a).$

BIZONYÍTÁS:

9. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

9.1. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_f^0$$

akkor

a $K_{x_0}(f): D_f \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az f függvény x_0 helyhez tartozó különbségi hányados függvényének nevezzük.

Ha

$$\exists \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \text{ szám,}$$

akkor

ezt a számot az f függvény x_0-beli differenciálhányadosának nevezzük.

Jelölés: $f'(x_0),\ D(x_0),\ \left.\dfrac{df}{dx}\right| x = x_0$.

Az $x_0 \in \mathbb{R}$ helyen differenciálható függvények osztályát $D[x_0]$-lal jelöljük.

9.2. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

akkor

azt mondjuk, hogy az f grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ pontban van érintője, ha $\exists f'(x_0)$. Az $(x_0, f(x_0))$ ponton áthaladó $f'(x_0)$ iránytangensű egyenest az f grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjához tartozó érintőjének nevezzük.

$\left(e_{x_0} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e_{x_0}(x) := f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)$

9.3. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_f^0,$$

ekkor

$$f \in D[x_0] \Leftrightarrow \exists \varepsilon : D_f \to \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R},\ \text{hogy}$$

$$\lim_{x_0} \varepsilon = 0 \ \text{és}$$

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0).$$

BIZONYÍTÁS:

9.4. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_f^0,$$

ekkor

$$f \in D[x_0] \Rightarrow f \in C[x_0].$$

BIZONYÍTÁS:

(Könnyen belátható, hogy az állítás megfordítása nem igaz.)

9.5. TÉTEL:

Legyen

$$f, g \in D[x_0],\ c \in \mathbb{R},$$

ekkor

$$c \cdot f \in D[x_0] \ \text{és} \ (cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

$$f + g \in D[x_0] \ \text{és} \ (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$f \cdot g \in D[x_0] \ \text{és} \ (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in D[x_0] \text{ és } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

BIZONYÍTÁS:

9.6. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ és

$[x_0, x_0 + \delta[\subset D_f$

$\exists \lim_{x_0+0} K_{x_0}(f)$

akkor

azt mondjuk, hogy az f az $x_0 \in D_f$ pontban jobbról differenciálható, és ezt a határértéket jobboldali differenciálhányadosnak nevezzük, és $f'_+(x_0)$-lal jelöljük. (A baloldali differenciálhányados analóg módon definiálható.)

9.7. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és

$\forall x \in H$ esetén $f \in D[x]$

akkor

az $f : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ függvényt

az f derivált függvényének nevezzük.

A H halmazon differenciálható függvények osztályát $D(H)$-val jelöljük.

9.8. TÉTEL:

Legyen

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R_f \subset D_g$

$f \in D[x_0]$, $g \in D[f[x_0]]$

ekkor

$g \circ f \in D[x_0]$ és

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

BIZONYÍTÁS:

A 9.3. TÉTEL alkalmazásával egyszerűen adódik.

9.9. TÉTEL:

Legyen

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő és folytonos,

$x_0 \in]a,b[, \ y_0 := f(x_0)$

$f : D[x_0]$

$f'(x_0) \neq 0$

ekkor

$f^{-1} \in D[y_0]$ és

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

9.10. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x_0 \in D_f^0, \ f \in D[x_0]$

ekkor

(1) f az x_0-ban lokálisan nő [fogy] $\Leftrightarrow f'(x_0) \geq 0 [f'(x_0) \leq 0]$

(2) $f'(x_0) > 0 [f'(x_0) < 0] \Rightarrow f$ az x_0-ban szigorúan lokálisan nő [fogy].

BIZONYÍTÁS:

(1) f az x_0-ban lokálisan nő $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ hogy

$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$, tehát

$x \in B(x_0, \delta)$ esetben $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, így

$$f'(x_0) = \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 .$$

(2) Tegyük fel, hogy $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

(3) $x \in B(x_0, \delta) - \{x_0\}$ esetben $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, tehát

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

(Az állítások többi része hasonlóan igazolható.)

9.11. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f^0$

f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van

ekkor

$f'(x_0) = 0$.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel, hogy $f'(x_0) \neq 0$, ekkor

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ az x_0-ban szigorúan lokálisan nő,

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ az x_0-ban szigorúan lokálisan csökken.

9.12. ROLLE TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$, $f \in D(]a,b[)$, $f(a) = f(b)$

ekkor

$\exists \xi \in]a,b[$, hogy $f'(\xi) = 0$.

BIZONYÍTÁS:

$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists m := \min f, M := \max f.$

Ha $m = M \Rightarrow f$ konstans $\Rightarrow \forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$.

Ha $m \neq M \Rightarrow$ közülük legalább az egyiket az f az intervallum belsejében veszi fel, mivel $f(a) = f(b)$.

Ebben a belső pontban f-nek lokális szélsőértéke van, így $f'(\xi) = 0$.

9.13. CAUCHY TÉTEL:

Legyen

$$f,g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f,g \in C[a,b],\ f,g \in D(]a,b[),$$
$$g'(x) \neq 0\ \ (x \in]a,b[)$$

ekkor

$\exists \xi \in]a,b[$, hogy $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

BIZONYÍTÁS:

Az előző tétel alapján $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$.

Legyen $F(x) := f(x) - \lambda g(x)$ úgy, hogy F kielégítse a ROLLE tétel feltételeit:

$F \in C[a,b],\ F \in D(]a,b[)$, így csak $F(a) = F(b)$-t kell biztosítani.

$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$, azaz $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Alkalmazzuk a ROLLE tételt F-re $\Rightarrow$ $\exists \xi \in]a,b[$, hogy

$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda \cdot g'(\xi)$,

tehát $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

9.14. LAGRANGE TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in C[a,b],\ f \in D(]a,b[)$$

ekkor

$\exists \xi \in]a,b[$, hogy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen az előző tételben $g(x) = x,\ x \in]a,b[$.

9.15. TÉTEL:

Legyen

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f \in D(]a,b[)$$

ekkor

(a) $x \in]a,b[: f'(x) \geq 0 [f'(x) > 0] \Rightarrow$ f [szigorúan] monoton növekedő $]a,b[$-n

(b) $x \in]a,b[: f'(x) \leq 0 [f'(x) < 0] \Rightarrow$ f [szigorúan] monoton csökkenő $]a,b[$-n

(c) $x \in]a,b[: f'(x) = 0 \Rightarrow f$ állandó.

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$a < x_1 < x_2 < b$.

Alkalmazzuk az f függvényre az $[x_1, x_2]$ intervallumon a LAGRANGE tételt. Ekkor $\exists \xi \in]a,b[$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

(a) $x \in]a,b[\Rightarrow f'(x) \geq 0 [f'(x) > 0]$, akkor az előző alapján f [szigorúan] monoton növekedő.

(b) Az (a) ponthoz hasonlóan.

(c) $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$.

9.16. DARBOUX TÉTELE:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \in D(]a,b[)$

$a < x_1 < x_2 < b$ és $f'(x_1) \neq f'(x_2)$

$C \in [[f'(x_1), f'(x_2)]]$

ekkor

$\exists \xi \in]x_1, x_2[$, hogy $f'(\xi) = C$.

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$F(x) := f(x) - c \cdot x$, $x \in]a,b[$.

Megmutatjuk, hogy F-nek az $]x_1, x_2[$-ben van lokális szélsőértéke. Ha a szélsőértékhelye ξ, akkor $F'(\xi) = 0$, vagyis $f'(\xi) = C$.

Nyilvánvaló, hogy $F \in D(]a,b[)$ és $F'(x) = f'(x) - c$ miatt $f'(x_1) < c < f'(x_2) \Rightarrow F'(x_1) < 0 < F'(x_2)$, valamint $f'(x_1) > c > f'(x_2) \Rightarrow F'(x_1) > 0 > F'(x_2)$.

Mivel $F \in C[x_1, x_2]$, ezért F-nek van $[x_1, x_2]$-ben maximuma és minimuma.

Ha $F'(x_1) > 0 > F'(x_2) \Rightarrow$ x_1-ben F szigorúan lokálisan nő,

x_2-ben F szigorúan lokálisan fogy.

Tehát x_1 és x_2 egyike sem maximumhely, így F a maximumát egy $\xi \in]x_1, x_2[$-ben veszi fel.

Az $F'(x_1) < 0 < F'(x_2)$ eset hasonlóan igazolható.

9.17. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $H \subset D_f$

$\forall x \in H$ esetén $f \in D[x]$

akkor

az legyen f nulladik deriváltja: $f^{(0)} = f$.

Ha

$n \in \mathbb{N}^+$ és

$f^{(n-1)}$ már értelmezve van,

akkor

f n. deriváltja: $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$.

9.18. TÉTEL: TAYLOR FORMULA:

Legyen

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$

f n-szer folytonosan differenciálható I-n.

f $n+1$-szer folytonosan differenciálható $I^0 - n$.

$x_1 x_0 \in I$, $x \neq x_0$,

ekkor

$\exists \xi \in \mathbb{R} : \ 0 < \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0} < 1$ úgy, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$R : I \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto R(t) := f(t) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k}_{P(t)}$$

$\varphi(t) := (t - x_0)^{n+1}$.

Differenciálhatóság szempontjából R olyan, mint f.

$P(t)$ úgy nevezik, hogy az f függvény x_0 ponthoz tartozó n-edik rendű Taylor polinomja.

$R^{(k)}(x_0) = 0 \qquad k = 0, 1, ..., n$

$R^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, mert P-nek n-nél magasabb fokú deriváltjai 0-val egyenlők.

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}$$

Cauchy tétele szerint: $\exists \xi_1 : 0 < \frac{\xi_1 - x_0}{x - x_0} < 1$, hogy

$$\frac{R(x) - R(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{R'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} = \frac{R'(\xi_1) - R'(x_0)}{\varphi'(\xi_1) - \varphi(x_0)}.$$

A fenti eljárást folytatva $k = 2, 3, ..., n+1$-ik deriváltra:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)} x_0}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

9.19. TÉTEL: (L'HOSPITAL SZABÁLY)

Legyen

$-\infty \le a < b < \infty$

$f, g \in D(]a, b[)$

$g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a, b[$

$\exists \lim_{a+0} f$, $\exists \lim_{a+0} g$ és $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$, $f(a) = g(a) = 0$.

$\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$ esetleg tágabb értelemben vett határérték

ekkor

$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$.

BIZONYÍTÁS:

(1) Legyen $-\infty < a$.

Legyen $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists x_0]a, b[$, hogy

$$\forall y \in]a, x_0[: \frac{f'(y)}{g'(y)} \in B(A, \varepsilon). \quad (*)$$

Mivel $f, g \in \subset [a, x_0]$ ezért $x \in]a, x_0[$ esetén az $[a, x]$ intervallumban

teljesülnek a CAUCHY tétel feltételei:

$\exists \xi \in]a,x[: \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Mivel $\xi \in]a,x_0[$, ezért (*) alapján $\forall x \in]a,x_0[$ esetén

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in (A,\varepsilon)$, ezért $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

(2) Legyen $a = -\infty$ (Visszavezetjük az előző esetre.)

Legyen $F(y) = f\left(y_0 - \frac{1}{y}\right)$, $G(y) = g\left(y_0 - \frac{1}{y}\right)$, minden $y \in]0,c[$

esetén, ahol c olyan, hogy $y_0 - \frac{1}{c} < b$.

Az F és G értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy minden $y \in]0,c[$

pontban $F'(y) = \frac{1}{y^2} \cdot f'\left(y_0 - \frac{1}{y}\right)$, $G'(y) = \frac{1}{y^2} \cdot g'\left(y_0 - \frac{1}{y}\right) \neq 0$.

Minthogy $\lim_{+0} F = \lim_{-\infty} f = 0$ és $\lim_{+0} G = \lim_{-\infty} g = 0$ és mivel létezik a

$\lim_{+0} \frac{F'}{G'} = \lim_{-\infty} \frac{f'\left(y_0 - \frac{1}{y}\right)}{g'\left(y_0 - \frac{1}{y}\right)} = \lim_{-\infty} \frac{f'}{g'}$ határérték, ezért az F és G

függvényre a $]0,c[$ intervallumban alkalmazva az előbbi eredményt

$\lim_{+0} \frac{F'}{G'} = \lim_{+0} \frac{F}{G}$. Mivel $\lim_{+0} \frac{F}{G} = \lim_{-\infty} \frac{f}{g}$, ezért a tétel állítása igaz.

Bal oldali határértékre hasonló tétel érvényes.

9.20. TÉTEL: (L'HOSPITAL SZABÁLY)

$-\infty \leq a < b$

$f, g \in D(]a,b[)$

$g'(x) \neq 0$, ha $x \in]a,b[$

$\exists \lim_{a+0} f$, $\exists \lim_{a+0} g$ és $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$

$\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$ esetleg tágabb értelemben vett határérték,

ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \text{ és } \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$.

(1) Legyen $A < +\infty \; -\infty < a$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists x_0 \in]a,b[$, hogy $\forall y \in]a,x_0[: \frac{f'(y)}{g'(y)} \in B(A,\varepsilon)$. (*)

Mivel $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$, ezért x_0 megválasztható úgy, hogy

$0 < f(x), 0 < g(x)$ (ha $x \in]a,x_0[$) teljesüljön.

Legyen $x \in]a,x_0[$ esetén az $[x,x_0]$ intervallumban alkalmazzuk CAUCHY féle középérték tételt:

$$\exists \xi \in]x_0,x[: \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

A bal oldali kifejezés:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}} \qquad (x \in]a,x_0[).$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$T(x) := \frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}} \qquad x \in]a,x_0[, \text{ ekkor}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot T(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(T(x)-1).$$

Mivel $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$, ezért $\lim_{a+0} T = 1$.

Mivel (*) alapján $\frac{f'}{g'}$ az $]a,x_0[$ intervallumban korlátos, ezért

$\lim_{a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(T(x)-1) = 0$, tehát $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$.

(2) Legyen $A = +\infty$.

Mivel $\lim_{a+0} T = 1$, ezért $\exists x_1 \in]a, x_0[$, hogy $\forall x \in]a, x_1[$ esetén $|T(x)| > \frac{1}{2}$.

Innen (*) miatt minden $x \in]a, x_1[$ pontban:

$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > \frac{1}{2\varepsilon}$ igaz.

Az $A = -\infty$ esetben az állítás hasonlóan igazolható.

Ha $a = -\infty$ akkor a 9.19. TÉTEL bizonyításában használt transzformáció segítségével visszavezethető a véges helyen vett határértékre.

9.21. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D_f^0, \ f \in D[x_0]$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\Rightarrow f'(x) < 0$ és

$x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[\Rightarrow f'(x) > 0$ *

vagy $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\Rightarrow f'(x) > 0$ és

$x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[\Rightarrow f'(x) < 0$ **

akkor

f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van:

(*) esetben lokális minimum,

(**) esetben lokális maximum.

BIZONYÍTÁS:

9.22. MEGJEGYZÉS:

Ha f monoton, és $\{x \in D_f : f'(x) = 0\}^0 = \varnothing$,

akkor f szigorúan monoton.

(Ez enyhébb, mint a 9.15. TÉTEL-beli feltétel.)

9.23. TÉTEL:

Legyen

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in D_f^0$, $f \in D[x_0]$

$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

$\exists f^{(n)}(x_0)$ és $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

ekkor

ha n páratlan $\Rightarrow$ $f(x_0)$ nem szélső érték

ha n páros $\Rightarrow$ $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ szigorú lokális minimum

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ szigorú lokális minimum.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel, hogy $f^{(n)}(x_0) > 0$, ekkor $\lim\limits_{y \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(y) - f^{(n-1)}(x_0)}{y - x_0} > 0$ és így

$\exists \delta \leq r$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ amivel $\quad 0 < |y - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f^{(n-1)}(y) - f^{(n-1)}(x_0)}{y - x_0} = \dfrac{f^{(n-1)}(y)}{y - x_0} > 0$,

tehát $f^{(n-1)}\big|]x_0 - \delta, x_0[< 0$ és $f^{(n-1)}\big|]x_0, x_0 + \delta[> 0$.

Ha $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \neq x_0$, akkor x és x_0 között létezik $t \in \mathbb{R}$, amivel

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(k-1)}(t)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} =$$
$$= f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \qquad (*)$$

Ha n páratlan, tehát $(x - x_0)^{n-1} > 0$, akkor (*) szerint $f(x) - f(x_0)$ és $f^{(n-1)}(t)$ előjele megegyezik $\Rightarrow f$-nek nincs szélsőértéke x_0-ban.

Ha n páros, akkor $f^{(n-1)}(t)(x - x_0)^{n-1}$ pozitív akkor is, ha $x > x_0$, tehát $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, így f-nek x_0-ban szigorú lokális minimuma van.

Az $f^{(n)}(x_0) < 0$ eset hasonlóan tárgyalható.

9.24. DEFINÍCIÓ:

Ha

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum

$f : I \to \mathbb{R}$

akkor

f konvex $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ és

$p, q \in [0,1]$, $p + q = 1$ esetén

$f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$

f szigorúan konvex $\Leftrightarrow$ az előző egyenlőtlenségben egyenlőség csak $p = 0$ vagy $q = 0$ esetben áll fenn.

f konkáv $\Leftrightarrow -f$ konvex

f szigorúan konkáv $\Leftrightarrow -f$ szigorúan konvex.

Ha

$J \subset I$

akkor

f konvex (szigorúan konvex, konkáv, szigorúan konkáv)

J-n $\Leftrightarrow f|J$ konvex (szigorúan konvex, konkáv szigorúan konkáv).

9.25. TÉTEL:

Legyen

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum

$f : I \to \mathbb{R}$

Akkor

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} x, y, z \in I \\ x < y < z \end{matrix} \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \right).$$

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Tegyük fel, hogy f konvex és $x, y, z \in I$, $x < y < z$.

Ekkor legyen $x_1 := x,\ x_2 := z,\ p = \frac{z-y}{z-x}; q = \frac{y-x}{z-x}$, ezekkel $p,q \in [0,1], q+q=1, px_1 + qx_2 = y$, ha most felírjuk a definíciót, akkor $f(y) \le \frac{(z-y)f(x)+(y-z)f(z)}{z-x}$, ami ekvivalens a bizonyítandó állítással.

$\Leftarrow$

Legyen $I = [a,b]$ vagy $]a,b[$ vagy $[a,b[$ vagy $]a,b]$.

Tegyük fel, hogy f-re minden $x,y,z \in]a,b[$ és $x < y < z$ esetén fennáll, hogy $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Legyen $x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 < x_2$, $q,q \in [0,1]$, $p+q=1$, ekkor $p=1 \Rightarrow q=0$ és $q=1 \Rightarrow p=0$ esetekben az $f(px_1+qx_2) \le p\,f(x_1)+q\,f(x_2)$ feltételben az egyenlőség teljesül.

Ha $p,q \in]0,1[$, akkor legyen $x := x_1,\ z := x_2,\ y := px_1 + qx_2$.

Ekkor $x < y < z$ és $(z-y)(f(y)-f(x)) \le (y-x)(f(z)-f(y))$-ból $(z-y)f(y) \le (z-y)f(x)+(y-x)f(z)$, majd $(x_2-x_1)f(px_1+qx_2) \le p(x_2-x_1)f(x_1)+q(x_2-x_1)f(x_2)$ következik, amiből $f(qx_1+qx_2) \le pf(x_1)+qf(x_2)$.

9.26. TÉTEL:

Legyen

I intervallum

$f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható

ekkor

(a) konvex $\Leftrightarrow$ f' monoton növekedő,

(b) f szigorúan konvex $\Leftrightarrow$ f' szigorúan monoton növekedő.

BIZONYÍTÁS:

(a) $\Rightarrow$

Legyen a és b az I két végpontja.

Ha f konvex I-n és $c,d\in I,\ c<d$ tetszőleges, akkor adott $n\in N^+$, $n\neq 1$ esetén legyen

$$x_k := c+\frac{k(d-c)}{n}.$$

Így $c=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=d$, tehát az előző tétel szerint

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\ldots\le\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}},\text{ tehát}$$

$$\frac{f\left(c+\frac{d-c}{n}\right)-f(c)}{\frac{d-c}{n}}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\le\ldots\le\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=$$

$$=\frac{f(d)-f\left(d-\frac{d-c}{n}\right)}{\frac{d-c}{n}}.\text{ Mivel }f'(c)=f'_+(c)=\lim\frac{f\left(c+\frac{d-c}{n}\right)-f(c)}{\frac{d-c}{n}}$$

és $f'(d)=f'_-(d)=\lim\dfrac{f(d)-f\left(d+\dfrac{d-c}{n}\right)}{\dfrac{d-c}{n}}$, ezért a fenti

egyenlőtlenségből $f'(c)=f'(d)$ következik.

(a) $\Rightarrow$

Ha f' monoton növekedő I-n és $x,y,z\in I, x<y<z$ tetszőlegesen adottak, akkor LAGRANGE tétele szerint létezik $c\in]x,y[$ és $d\in]y,z[$, amivel

$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$

$f(z)-f(y)=f'(d)(z-y)$ és

$f'(c)\le f'(d)$ teljesül, ezért

$f'(c)\le f'(d)$ tehát az előző tétel szerint f konvex I-n.

(b) $\Rightarrow$

Ha f szigorúan konvex I-n és létezne $]c,d[\subset I$, hogy $f'(x)=k\in\mathbb{R}$ $]c,d[$-n, akkor $f'(x)-k=0$ miatt $f(x)-kx=m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=kx+m\Rightarrow$ f nem szigorúan konvex $]c,d[$-n, tehát I-n sem.

(b) $\Leftarrow$

Ha f szigorúan monoton növekedő I -n, és mégis létezne $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ és $p, q \in [0,1], p+q=1$, amivel $x := px_1 + qx_2$ jelöléssel $(p+q)f(x) = p\,f(x_1) + q\,f(x_2)$, ahol $x \in]x_1, x_2[$, akkor $p(f(x) - f(x_1)) = q(f(x_2) - f(x))$ és $p = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, q = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ miatt $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, LAGRANGE tétele szerint $\exists C \in]x_1, x[, d \in]x, x_2[$, amivel $f'(c) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ és $f'(d) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \Rightarrow f'(c) = f'(d)$, ami ellentmond f' szigorú monotonitásának.

9.27. TÉTEL:

Legyen

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum

$f : I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható

ekkor

f konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

f szigorúan konvex $\Leftrightarrow$ f konvex és $\exists\ ]c, d[\subset I$, amire $x \in]c, d[\Rightarrow f''(x) = 0$ teljesül.

BIZONYÍTÁS:

9.28. DEFINÍCIÓ:

Ha

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum

$f : I \to \mathbb{R}$

$x \in I$

akkor

x inflexiós helye, és $(x, f(x))$ inflexiós pontja az f függvénynek $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+$, hogy $f|]x-r, x]$ konvex és $f|[x-r, x[$ konkáv vagy fordítva.

9.29. TÉTEL:

Ha

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum

$f : I \to \mathbb{R}$

$x \in I$

ekkor

x inflexiós helye f-nek $\Leftrightarrow x$ szélsőértékhelye f'-nek.

BIZONYÍTÁS:

9.30. MEGJEGYZÉS:

A 9.23. TÉTEL-ben az n páratlan eset kiegészíthető azzal az állítással, hogy f-nek x_0-ban inflexiós helye van.

9.31. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és

$l \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto l(x) := ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$\lim_{\infty}(f - l) = 0$, vagy $\lim_{-\infty}(f - l) = 0$

akkor

az l lineáris függvényt az f asszimptotájának nevezzük.

10. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

10.1. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f :]a,b[\to \mathbb{R}$$

$$F :]a,b[\to \mathbb{R}$$

$$F' = f$$

akkor

azt mondjuk, hogy F primitív függvénye f-nek.

10.2. TÉTEL:

Legyen

$$f :]a,b[\to \mathbb{R}$$

F primitív függvénye f-nek

ekkor a

$G :]a,b[\to \mathbb{R}$ primitív függvénye f-nek $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ : \ G = F + c(\cdot)$.

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Ha G primitív függvénye f-nek, akkor $G' = f$, a feltétel szerint viszont $F' = f$, így $F' = G'$, tehát $(F - G)' = 0(\cdot) \Rightarrow F - G = állandó$.

$\Leftarrow$

Ha $G = F + c(\cdot)$, akkor $G' = F' = f$, tehát G primitív függvénye f-nek.

10.3. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$f :]a,b[\to \mathbb{R}$$

akkor legyen

$\int f := \left\{ F \in \mathbb{R}^{]a,b[} : F' = f \right\}$. (Ezt a halmazt f határozatlan integráljának nevezzük.)

$\int_{x_0} f$ azt a primitív függvény jelöli, amely x_0-ban „eltűnik”. Ha $F \in \int f$, akkor

$$\int_{x_0} f := F - F(x_0).$$

10.4. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$A \subset \mathbb{R}, \quad B \subset \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$$

$$\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^A, \quad \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^A, \quad h \in A^D, \quad c \in \mathbb{R}$$

akkor

$$c \cdot \mathrm{A} := \left\{ c \cdot f \in \mathbb{R}^A : f \in \mathrm{A} \right\}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} := \left\{ f + g \in \mathbb{R}^{A \cap B} : f \in \mathrm{A}, g \in \mathrm{B} \right\}$$

$$\mathrm{A} \circ h := \left\{ f \circ h \in \mathbb{R}^D : f \in \mathrm{A} \right\}$$

10.5. TÉTEL:

Legyen

$$f :]a,b[\to \mathbb{R}$$

$$g :]a,b[\to \mathbb{R}$$

$$p, q \in \mathbb{R}$$

$$\int f \neq \emptyset, \quad \int g \neq \emptyset$$

ekkor

$$\int (pf + q \cdot g) \neq \emptyset \quad \text{és} \quad \int (pf + q \cdot g) = p \int f + q \cdot \int g .$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $F \in \int f, \quad G \in \int g,$ ekkor $pF \in \int pf, \quad qG \in \int q \cdot g \Rightarrow pF + qG \in \int (pf + qg)$

tehát $\int pf + qg \neq \emptyset$ és $\underline{p \int f + q \int g \subset \int (pf + qg).}$

Legyen $H \in \int (pf + q \cdot g) \Rightarrow H' = pf + q \cdot g$, de $pF' + q \cdot G' = pf + q \cdot g$ is igaz, így

$H' = pF' + q \cdot G'$, tehát $H \in \int \left(pF' + q \cdot G'\right) = p\int f + q\int g \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\int (pf + qg) \subset p\int f + q\int g}$.

10.6. TÉTEL:

Legyen

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$

$g :]a,b[\to \mathbb{R}$

f, g differenciálható $]a,b[$-n és

$f'g \neq \emptyset$

ekkor

$\int f \cdot g' \neq \emptyset$ és $\int fg' = fg - \int f'g$.

BIZONYÍTÁS:

Ha

$H \in \int f'g$, akkor

$(fg - H)' = fg' + f'g - H' = fg' + f'g - f'g = fg'$.

Tehát

$fg - H \in \int fg'$, így $\int fg' \neq \emptyset$ és $\underline{fg - \int f'g \subset \int fg'}$.

Legyen $K \in \int fg' \Rightarrow K' = f \cdot g' = fg' + f'g - f'g = (f \cdot g)' - f'g \Rightarrow K \in fg - \int f'g$,

tehát $\underline{\int f \cdot g' \subset fg - \int f'g}$, ezért

$\int fg' = fg - \int f'g$.

10.7. TÉTEL:

Legyen

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$ Ha még $R_g \subset D_f$

$g :]c,d[\to]a,b[$ φ folytonosan diff.ható szig. mon.

g differenciálható $]c,d[$-n akkor

$\int f \neq \varnothing$ $\int\left(\left(f \circ g\right) \cdot g'\right) \circ g^{-1} = \int f$.

ekkor

$\int\left(\left(f \circ g\right) \cdot g'\right) \neq \varnothing$ és $\int\left(\left(f \circ g\right) \cdot g'\right) = \left(\int f\right) \circ g$.

BIZONYÍTÁS:

Ha $F \in \int f$, akkor F differenciálható $]a,b[$-n, ezért $\left(F \circ g\right)' = F' \circ g \cdot g' = \left(f \circ g\right) \cdot g'$, tehát $F \circ g \in \int\left(\left(F' \circ g\right) \cdot g'\right)$, így $F \circ g \in \int\left(f \circ g\right) \cdot g'$ és $\int\left(f \circ g\right) \cdot g' \neq \varnothing$,

valamint $\underline{\left(\int f\right) \circ g \subset \int\left(\left(f \circ g\right) \cdot g'\right)}$.

Legyen $K \in \int\left(f \circ g\right) \cdot g' \Rightarrow K' = \left(f \circ g\right) \cdot g' = \left(F \circ g\right)' \Rightarrow K \in \int\left(F \circ g\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow K \in \left(\int f\right) \circ g \Rightarrow \underline{\int\left(\left(f \circ g\right) \cdot g'\right) \subset \left(\int f\right) \circ g}$, tehát

$\int\left(f \circ g\right) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g$.

11. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

11.1. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$[a,b] \subset \mathbb{R}$$

akkor

$d := \{x_i : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ az $[a,b]$ egy beosztása

d elemeit d osztáspontjainak nevezzük,

az $[x_{i-1}, x_i]$-k $(i = 1, \ldots, n)$ a d részintervallumai

$\|d\| := \sup\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ a d finomsága.

11.2. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$[a,b] \subset \mathbb{R}$$

d_1 és d_2 beosztása $[a,b]$-nek

akkor

d_2 továbbosztása d_1-nek $\Leftrightarrow d_1 \subset d_2$

$d_1 \cup d_2$ a d_1 és d_2 beosztások egyesítése.

Ha

(d_n) az $[a,b]$ beosztásainak sorozata

akkor

(d_n) normális $\Leftrightarrow \lim(\|d_n\|) = 0$.

11.3. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos

$d = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ az $[a,b]$ egy beosztása

$m_i := \inf f([x_{i-1}, x_i]), \quad M_i := \sup f([x_{i-1}, x_i]), \quad \Delta x_i := x_i - x_{i-1}$

$s(f,d) := \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$ f-hez és d-hez tartozó alsó integrálközelítő összeg

$S(f,d) := \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$ f-hez és d-hez tartozó felső integrálközelítő összeg

$o(f,d) := \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ f-hez és d-hez tartozó oszcillációs összeg

és $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$-vel

$\sigma(f,d,\{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ f-hez, d-hez és $\{t_i\}$-hez tartozó integrálközelítő összeg.

11.4. TÉTEL:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, korlátos

$d,\ d_1,\ d_2$ beosztása $[a,b]$-nek

ekkor

(a) $\forall \{t_i\}$ esetén $s(f,d) \le \sigma(f,d,\{t_i\}) \le S(f,d)$

(b) $d_1 \subset d_2 \Rightarrow s(f,d_1) \le s(f,d_2), \quad S(f,d_2) \le S(f,d_1)$

(c) $s(f,d_1) \le S(f,d_2)$.

BIZONYÍTÁS:

A definíciókból rövid számolás után következik.

11.5. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, korlátos

akkor az

$\underline{I} := \int_a^b f := \sup\{ s(f,d) : d$ beosztása $[a,b]$-nek $\}$, az f függvény $[a,b]$ feletti alsó DARBOUX integrálja,

$\overline{I} := \overline{\int_a^b} f := \inf\{ S(f,d) : d$ beosztása $[a,b]$-nek $\}$, az f függvény $[a,b]$ feletti felső DARBOUX integrálja.

11.6. TÉTEL:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, korlátos

ekkor

$\underline{I},\ \overline{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \overline{I}$.

BIZONYÍTÁS:

Legyen d_1 az $[a,b]$ egy beosztása, ekkor $s(f,d_1)$ alsó korlátja az $\{ S(f,d) : d$ beosztása $[a,b]$-nek $\}$ halmaznak, tehát $\overline{I} \in \mathbb{R}$ és $\overline{I} \ge s(f,d_1)$.

Itt d_1 tetszőleges beosztása $[a,b]$-nek, ezért $\overline{I}$ felső korlátja az $\{ s(f,d) : d$ beosztása $[a,b]$-nek $\}$ halmaznak, tehát $\underline{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \overline{I}$.

11.7. KÖVETKEZMÉNY:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos

d az $[a,b]$ egy beosztása

ekkor

$s(f,d) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S(f,d)$ és

$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le o(f,d)$.

BIZONYÍTÁS:

Az előző tételből és a definíciókból azonnal következik.

11.8. PÉLDA:

Legyen

f a Dirrchlet függvény $[a,b]$-re való leszűkítése és $d=\{x_i\}$ az $[a,b]$ egy beosztása.

Mivel minden intervallumban van racionális és irracionális szám, ezért $m_i=0,\ M_i=1,$

$s(f,d)=b-a \Rightarrow \underline{I}=0,\ \overline{I}=b-a,$ tehát a Dirrchlet függvény nem integrálható $[a,b]$-n.

11.9. DEFINÍCIÓ:

Ha

$f:[a,b]\to \mathbb{R}$ korlátos

akkor

f Riemann integrálható $\Leftrightarrow \underline{I}=\overline{I}$.

Ezt a közös értéket $\int_a^b f$-fel vagy $\int_a^b f(x)dx$-szel jelöljük és az f függvény $[a,b]$ feletti Riemann-integráljának nevezzük.

Ha

$[c,d]\subset[a,b]$ és $f|_{[c,d]}$ Reimann-integrálható,

akkor

azt mondjuk, hogy f Reimann integrálható $[c,d]$-n

és $\int_c^d f$ az $f|_{[c,d]}$ Reimann integrálját jelöli.

11.10 TÉTEL (DARBOUX):

Legyen

$f:[a,b]\to \mathbb{R}$ korlátos

ekkor

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $[a,b]$ minden olyan d beosztására, amelyre $\|d\| < \delta$ teljesül,

$$(0 \le) S(f,d) - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon \quad \text{és} \qquad (1)$$

$$(0 \le) \overline{\int_a^b} f - s(f,d) < \varepsilon \quad \text{is fennáll.} \qquad (2)$$

BIZONYÍTÁS:

(1) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

Az $\overline{I} = \underline{\int_a^b}$ definíciója miatt létezik olyan $d_0 = \{x_{0,i}, i = 1, \ldots, r+1\}$ beosztása

$[a,b]$-nek, hogy $S(f,d_0) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Rögzítsük d_0-t és válasszuk az $[a,b]$ $d = \{y_j : j = 0, \ldots, n\}$ beosztását úgy, hogy

$$\|d\| < \delta := \inf\left\{\frac{\varepsilon}{4rK}, \quad \Delta x_{0,i} (i = 1, \ldots, r+1)\right\}$$

(ahol $|f| < K$) feltételt teljesítse.

Belátjuk, hogy $S(f,d) - \overline{I} < \varepsilon$

Ha $d_1 := d_0 \cup d = \{Z_k : k = 0, \ldots, m\}$, akkor a 11.4. miatt

$$S(f,d) - \overline{I} = S(f,d) - S(f,d_0) + S(f,d_0) - \overline{I} < S(f,d) - S(f,d_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eszerint elegendő belátni, hogy

$$(0 \le) S(f,d) - S(f,d_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az f függvény d_0, d, d_1 beosztás i-edik részintervallumán vett szuprémumát $M_{0,i}$, M_i, M_{1i} jelölje!

Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$\sum_{j=1}^{n} M_j \Delta y_j - \sum_{k=1}^{m} M_{1,k} \Delta Z_k < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Mivel $\|d\| < \inf\{\Delta x_{0,i}\}$, ezért $\Delta y_j < \Delta x_{0,i}$, tehát d egy $\lfloor y_{j-1}, y_j \rfloor$ részintervallumában legfeljebb egy $x_{0,i}$ osztáspont van.

Ezért d-ről d_1-re áttérve $\lfloor y_{j-1}, y_j \rfloor$ vagy d_1-nek is részintervalluma marad, vagy egyetlen $\rfloor y_{j-1}, y_j \lfloor$-be eső $x_{0,i}$ osztásponttal bomlik fel két d_1-beli részintervallummá. És ez legfeljebb r számú különböző $\lfloor y_{j-1}, y_j \rfloor$-vel fordulhat elő.

(Az első esetben (*) bal oldalának mindkét tagjában fellép ugyanaz az összeadandó.) Ha csak az azonosan el nem tűnő különbségeket írjuk ki, akkor

$$\sum_{*} M_j \Delta y_j - M_{1,k_1} \Delta Z_{k_1} - M_{1,k_2} \Delta Z_{k_2}$$

alakú lesz a bal oldal. Ez azonban $\Delta y_j = \Delta Z_{k_1} + \Delta Z_{k_2}$ miatt

$\sum_{*} (M_j - M_{1,k_1}) \cdot \Delta Z_{k_1} + (M_j - M_{1,k_2}) \Delta Z_{k_2} \le$ alakra hozható, ahol $\sum_{*}$ legfeljebb r tagú. Mivel $M_j - M_{1,k_1} < 2K$ és $M_j - M_{1,k_2} < 2K$, ezért

$$\le \sum_{*} 2K(\Delta Z_{k_1} + \Delta Z_{k_2}) = 2K \sum_{*} \Delta y_j \le 2rK\|d\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A (2) állítás hasonlóan bizonyítható.

11.11. TÉTEL:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos

ekkor

$[a,b]$ minden normális (d_k) beosztássorozata esetén

(1) $\exists \lim_{k\to\infty} s(f, d_k)$ és $\lim_{k\to\infty} s(f, d_k) = \underline{I}$

(2) $\exists \lim_{k\to\infty} S(f, d_k)$ és $\lim_{k\to\infty} S(f, d_k) = \overline{I}$

$\exists (\delta(f, d_k)_1)$ és $\exists (\delta(f, d_k)_2)$, hogy

(3) $\exists \lim_{k\to\infty} \delta(f, d_k)_1$ és $\lim_{k\to\infty} \delta(f, d_k)_1 = \underline{I}$

(4) $\exists \lim_{k\to\infty} \delta(f, d_k)_2$ és $\lim_{k\to\infty} \delta(f, d_k)_2 = \overline{I}$.

BIZONYÍTÁS:

Az (1) és (3) pontbeli állítást bizonyítjuk::

(1) Darboux tétele szerint $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy ha d olyan beosztása

$[a,b]$-nek, amire $\|d\| < \delta_1$, akkor $|s(f,d) - \underline{I}| < \varepsilon$

Mivel $\lim_{k\to\infty} \|d_k\| = 0$, ezért $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy

$n \in \mathbb{N}^+, \quad n > n_0 \Rightarrow \|d_n\| < \delta$.

Ekkor $k > n_0 \Rightarrow \|d_k\| < \delta \Rightarrow |s(f,d_k) - \underline{I}| < \varepsilon$, vagyis $\exists \lim_{k\to\infty} s(f,d_k)$ és $= \underline{I}$.

(2) Ha $d_k = \{x_{k,i} : i = 0, \ldots, n_k\}$, $m_{k_i} := \inf f([x_{k,i-1}, x_{k,i}])$, akkor $\exists t_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$,

amire $m_{k,i} + \frac{1}{k} > f(t_{k,i}) \geq m_{k_i}$.

Ilyen $t_{k,i}$-vel képezett $\delta(f,d_k)_1$-re:

$\sum_i \left(m_{k,i} + \frac{1}{k}\right)\Delta x_{k,i} > \delta(f,d_k)_1 \geq s(f,d_k)$ miatt

$s(f,d_k) + \frac{b-a}{k} > \delta(f,d_k)_1 \geq s(f,d_k)$ áll fenn, amiből (1) miatt

$\lim_{k\to\infty} \delta(f,d_k)_1 = \underline{I}$ következik.

11.12. TÉTEL:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos

ekkor

f Riemann integrálható

$\Leftrightarrow$ $\exists I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ – hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy ha d olyan beosztása $[a,b]$- nek, amire $\|d\| < \delta$, akkor $|\delta(f,d) - I| < \varepsilon$.

BIZONYÍTÁS:

Darboux tétele szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy ha $[a,b]$ intervallum d beosztására $\|d\| < \delta_1$, akkor $S(f,d) - \bar{I} < \varepsilon$ és $\underline{I} - s(f,d) < \varepsilon$ is fennáll.

Ha f Riemann integrálható, és $I := \int_a^b f$, akkor $\delta := \delta_1$ választással $\|d\| < \delta \Rightarrow |s(f,d) - I| < \varepsilon$ és $|S(f,d) - I| < \varepsilon$ (valamint $s(f,d) \le \delta(f,d) \le S(f,d)$) $\Rightarrow |\delta(f,d) - I| < \varepsilon$.

Ha létezik a tétel állításában szereplő I, akkor legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőlegesen adott és $d := \{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ olyan beosztása $[a,b]$-nek, amire $\|d\| < \delta_1$, $\|d\| < \delta_2$ $\left(\Rightarrow |\underline{I} - s(f,d)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\delta(f,d) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$.

Válasszuk $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$-t úgy, hogy $f(t_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \Rightarrow |\delta(f,d) - s(f,d)| < \frac{\varepsilon}{3}$ fennálljon, ekkor $|I - \underline{I}| \le |I - \sigma| + |\delta - s| + |s - \underline{I}| < \varepsilon$.

Mivel $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges volt, így $I = \underline{I}$.

Az $I = \bar{I}$ hasonlóan bizonyítható, ezért $\underline{I} = I$, így f Riemann integrálható $[a,b]$-n.

11.13. TÉTEL:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos $[a,b]$-n

ekkor

f Riemann integrálható $\Leftrightarrow$ $[a,b]$ minden (d_k) normális beosztássorozatához tartozó minden $(\delta(f,d_k))$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.

(Ha minden $(\delta(f,d_k))$ konvergens, akkor határértéke $\int_a^b f$.)

BIZONYÍTÁS:

Ha f Riemann integrálható $[a,b]$-n, akkor $s(f,d_k) \le \delta(f,d_k) \le S(f,d_k)$ és $\lim_{k\leftarrow\infty} s(f,d_k) = \underline{I} = \overline{I} = \lim_{k\to\infty} S(f,d_k)$ miatt $\lim_{k\to\infty} \delta(f,d_k) = \int_a^b f$.

Ha minden $\delta(f,d_k)$ konvergens és $\delta(f,d_k)_1$ $\underline{I}$-hez, $\delta(f,d_k)_2$ $\overline{I}$-hez konvergál, akkor legyen

$$\delta(f,d_k) := \begin{cases} \delta(f,d_k)_1 \text{ ha } k \text{ páratlan} \\ \delta(f,d_k)_2 \text{ ha } k \text{ páros} \end{cases}.$$

Az így definiált $(\delta(f,d_k))$ sorozat is konvergens, ami csak úgy lehetséges, ha bármely két részsorozatának határértéke megegyezik. Ezért $\underline{I} = \overline{I}$, tehát f Riemann integrálható

$[a,b]$-n $\Rightarrow \forall(\delta(f,d_k))$ sorozat határértéke $= \int_a^b f$.

11.14. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$H \subset \mathbb{R}$$

akkor

$$H \text{ nullmértékű} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ - hoz } \exists \{]a_k, b_k[: k \in \mathbb{N}^+\} \\ \text{intervallumrendszer, amelyre} \\ H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[\text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon \end{array}.$$

11.15. MEGJEGYZÉS:

Könnyű belátni, hogy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok nullmértékű halmaz egyesítése szintén nullmértékű.

Adott $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, korlátos függvény esetén $[c,d] \subset [a,b]$ esetén legyen

$0(]c,d[) := \sup f(]c,d[) - \inf f(]c,d[)$.

Ha $x \in [a,b]$ és $B(x,r) \subset [a,b]$, akkor $0(B(x,r))$ egy $]0,\infty[$-en értelmezett monoton növekedő nemnegatív függvény, ezért létezik $0(x) := \lim_{r\to 0+0} (0(B(x,r)))$ véges határérték és ≥ 0.

Könnyű belátni, hogy f folytonos x-ben $\Leftrightarrow 0(x)=0$.

(Így az is következik, hogy ha f folytonos x-ben, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists r \in \mathbb{R}^+$, hogy $0(B(x,r)) < \varepsilon$.)

11.16. TÉTEL (LEBESGUE):

Legyen

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos

ekkor

$$f \text{ Riemann integrálható} \Leftrightarrow \begin{matrix} f \text{ az } [a,b] \text{ egy nullmértékû részhalma-} \\ \text{zától eltekintve folytonos } [a,b]\text{-n} \end{matrix}.$$

BIZONYÍTÁS:

$\Rightarrow$

Legyen f Riemann integrálható $[a,b]$-n és legyen $c>0$ esetén $H_c := \{x : x \in [a,b], 0(x) > c\}$. Mivel f szakadási helyeinek halmaza $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}}$, ezért azt kell belátni, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\frac{1}{n}}$ nullmértékű, amihez viszont elegendő belátni, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $H_{\frac{1}{n}}$ vagy általában $c \in \mathbb{R}^+$ esetén H_c nullmértékű halmaz.

Legyenek $c, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ adottak és $d = \{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ az $[a,b]$ egy olyan beosztása, amire $0(f,d) < \frac{c \cdot \varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor $0(f,d) = \sum_{*} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{**} (M_i - m_i)\Delta x_i$, ahol

$\sum_{*}$ -ba olyan $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumokhoz tartozó összeadandókat sorolunk, amelyekre

$H_c \cap]x_{i-1}, x_i[\neq \emptyset \Rightarrow M_i - m_i \geq 0(]x_{i-1}, x_i[) > c$ teljesül.

Ekkor $\frac{c \cdot \varepsilon}{2} > 0(f,d) > \sum_{*} (M_i - m_i)\Delta x_i > c \sum_{*} \Delta x_i$ miatt $\sum_{*} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát d nyílt részintervallumaiba eső H_c pontok halmaz $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb összhosszúságú

intervallumrendszerrel lefedhető. H_c kimaradt pontjai legfeljebb d osztáspontjai lehetnek, ezek halmaza szintén lefedhető $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel. Így bármilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén H_c lefedhető ε-nál kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel, tehát H_c nullmértékű.

$\Leftarrow$

Ha f egy $H \subset [a,b]$ nullmértékű halmaz pontjaitól eltekintve folytonos $[a,b]$-n és $|f| < K$ $[a,b]$-n, akkor adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén H-t fedjük le olyan I intervallumrendszerrel, aminek összhossza $< \frac{\varepsilon}{4K}$, és aminek tagjai $[a,b]$ részintervallumai.

Ha $x \in [a,b] \setminus H$, akkor x-et fedjük le olyan $j(x) :=]x - r(x), x + r(x)[\cap [a,b]$ intervallummal, hogy $0(j(x)) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ teljesüljön.

Mivel $I \cup \{j(x)\}$ nyílt lefedése $[a,b]$-nek és $[a,b]$ kompakt, ezért $I \cup \{j(x)\}$ egy véges részrendszere is lefedi $[a,b]$-t.

Egy ilyen véges lefedés részintervallumai végpontjai meghatározzák $[a,b]$ egy $d = \{x_i\}$ beosztását. Ekkor $0(f,d) = \sum_{*} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{**} (M_i - m_i)\Delta x_i$, ahol $\sum_{*}$ -ba $0(f,d)$ olyan összeadandóit soroljuk, amelyekhez tartozó $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumok I valamelyik tagjának részei, így $\sum_{**}$ -ba már csak olyan összeadandók tartoznak, amelyekhez tartozó $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok mindegyike egy-egy $j(x)$ részintervalluma $\Rightarrow \sum_{*} (M_k - m_k)\Delta x_k < 2K \sum_{*} \Delta x_k < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} < \frac{\varepsilon}{2}$;

$$\sum_{**} (M_k - m_k)\Delta x_k <$$

$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{**} \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$, így $0(f,d) < \varepsilon$. Mivel $0 \le \bar{I} - \underline{I} \le 0(f,d)$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges volt, ezért $\underline{I} = \bar{I}$, tehát f integrálható $[a,b]$-n.

11.17. TÉTEL:

Legyen

$f \in C([a,b])$

ekkor

f Riemann integrálható $[a,b]$-n.

BIZONYÍTÁS:

11.16-ból következik.

11.18. TÉTEL:

Legyen

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monoton

ekkor

f Riemann integrálható $[a,b]$-n.

BIZONYÍTÁS:

Mivel monoton függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható, így nullmértékű, ezért 11.16-ból következik.

11.19. TÉTEL:

Legyen

$f_1, \ldots, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható $[a,b]$-n

$X := f_1([a,b]) \times \ldots \times f_n([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$

$g : X \to \mathbb{R}$ folytonos X-en

ekkor az

$F:[a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ integrálható $[a,b]$-n.

BIZONYÍTÁS:

Ha f_i szakadási helyeinek halmaz H_i, akkor H_i nullmértékű, ezért $H := H_1 \cup \ldots \cup H_n$ is nullmértékű. Így F szakadási helyeinek halmaza $(\subset H)$ is nullmértékű, tehát F integrálható $[a,b]$-n.

11.20. KÖVETKEZMÉNY:

(1) Ha f integrálható $[a,b]$-n, akkor $|f|$ is integrálható $[a,b]$-n.

(2) Ha f_1, f_2 integrálható $[a,b]$-n, akkor $f_1 + f_2, c \cdot f_1, f_1 \cdot f_2$ is integrálható $[a,b]$-n.

(3) Ha f integrálható $[a,b]$-n, és $\exists m \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \geq m$, akkor $1/f$ integrálható $[a,b]$-n.

BIZONYÍTÁS:

(1) $g(t) := |t|$

(2) $g(t_1, t_2) := t_1 + t_2,\ g(t) = c \cdot t,\ g(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$

(3) $g(t) := \frac{1}{t}$

11.21. TÉTEL:

Legyen

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrálhatóak $[a,b]$-n

$p, q \in \mathbb{R}$

ekkor

$$\int_a^b (pf + q \cdot g) = p \int_a^b f + q \cdot \int_a^b g .$$

BIZONYÍTÁS:

Ha (d_n) normális beosztássorozata $[a,b]$-nek, akkor minden $\delta(pf + q \cdot g, d_n)$-re:

$\delta(pf + q \cdot g, d_n) = p\delta(f, d_n) + q \cdot \delta(g, d_n)$ érvényes. Mivel f és g Riemann integrálhatóak, ezért $\lim_{n\to\infty} \delta(f, d_n) = \int_a^b f$, $\lim_{n\to\infty} \delta(g, d_n) = \int_a^b g$.

11.22. TÉTEL:

Legyen

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrálható $[a,b]$-n

$[c,d]\subset[a,b]$

ekkor

f integrálható $[c,d]$-n.

BIZONYÍTÁS:

Mivel nullmértékű halmaz minden részhalmaza nullmértékű és f $[a,b]$-beli szakadási helyeinek halmaza nullmértékű, ezért f $[c,d]$-beli szakadási helyeinek halmaz is nullmértékű, amiből LEBESGUE tétele alapján következik az állítás.

11.23. TÉTEL:

Legyen

$c\in]a,b[$ és $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n,

ekkor

f integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

BIZONYÍTÁS:

Ha f $[a,c]$-beli és $[c,b]$-beli szakadási helyeinek halmaz H illetve K, akkor f

$[a,b]$-beli szakadási helyeinek halmaza $H\cup K$. Mivel H és K nullmértékű, így $H\cup K$ is az, és így $\int_a^b f$ létezik.

<u>Egyenlőség:</u>

Legyen $(d_{1,n})$ és $(d_{2,n})$ az $[a,c]$ illetve $[c,b]$ egy-egy normális beosztássorozata és $(d_n)=(d_{1,n})\cup(d_{2,n})$, akkor (d_n) normális beosztássorozata $[a,b]$-nek.

A $\delta(f,d_{i,n})$ $(i=1,2)$ integrálközelítő összegek összege egy d_n-hez tartozó integrálközelítő összeg:

$\delta(f, d_n) := \delta(f, d_{1,n}) + \delta(f, d_{2,n})$, amire $\lim_{n\to\infty} \delta(f, d_n) = \int_a^b f$ teljesül.

Mivel $\lim_{n\to\infty} \delta(f, d_{1,n}) = \int_a^c f$ és $\lim_{n\to\infty} \delta(f, d_{2,n}) = \int_c^b f$, ezért igaz az állítás.

11.24. TÉTEL:

Legyen

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \le g(x)$, f, g integrálható

ekkor

$$\int_a^b f \le \int_a^b g .$$

BIZONYÍTÁS:

Az $[a,b]$ tetszőleges (d_k) normális beosztássorozatához $(d_k = \{x_{k,i} : i = 0, 1, \ldots, n\})$ és $t_{k,i} \in]x_{k,i-1}, x_{k,i}[$ pontokhoz tartozó integrálközelítő összegekre $f(t_{k,i}) \le g(t_{k,i})$ miatt $\delta(f, d_k) \le \delta(g, d_k)$ teljesül, ahonnan határátmenettel következik az állítás.

11.25. TÉTEL:

Legyen

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ két $[a,b]$-n integrálható függvény

ekkor

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| .$$

BIZONYÍTÁS:

Mivel $[a,b]$-n $f \le |f|$ és $-f \le |f|$, ezért $\int_a^b f \le \int_a^b |f|$ és $-\int_a^b f \le \int_a^b |f|$, ahonnan következik az állítás.

11.26. TÉTEL:

Legyen

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható és

$m \le f(x) \le M$

$0 \le g(x)$

ekkor

$$m\int_a^b g \le \int_a^b f\,g \le M\int_a^b g\,.$$

BIZONYÍTÁS:

Mivel fg, mg, Mg integrálható $[a,b]$-n, ezért $m \cdot g(x) \le f(x) \cdot g(x) \le M \cdot g(x)$-ből következik.

11.27. KÖVETKEZMÉNY:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható $[a,b]$-n és

$m \le f(x) \le M$

ekkor

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M\,.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen az előző tételben $g(x) := 1$.

11.28. KÖVETKEZMÉNY:

Legyen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n

ekkor

$\exists c \in [a,b]$, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f \ .$$

BIZONYÍTÁS:

Lebesgue tétele szerint f integrálható $[a,b]$-n.

Ha $m := \inf f([a,b])$ és $M := \sup f([a,b])$, akkor m és M függvényértékek, ezért Bolzano tétele szerint $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ is függvényérték.

11.29. DEFINÍCIÓ:

Ha

létezik $f(a) \in \mathbb{R}$, akkor $\int_a^a f := 0$.

Ha

létezik $\int_a^b f$, akkor $\int_b^a := \int_a^b f$.

11.30. DEFINÍCIÓ:

Ha

létezik $\int_a^b f$,

akkor az

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f$ függvény neve f integrálja, mint a felső határ függvénye.

11.31. TÉTEL:

Ha

f integrálható $[a,b]$-n

akkor

f integrálja, mint a felső határ függvénye folytonos $[a,b]$-n.

BIZONYÍTÁS:

Ha $[a,b]$-n

$f(x) \le K$ és $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, $x, y \in [a,b]$, akkor

$|F(x) - F(y)| = \left|\int_x^y f\right| \le \operatorname{sgn}(y-x)\int_x^y |f| \le K|x-y| < \varepsilon$, ha $|x-y| < \frac{\varepsilon}{K}$, ahonnan

következik az állítás.

11.32. TÉTEL:

Legyen

f folytonos az $x \in [a,b]$-ben

f integrálható $[a,b]$-n

$F(t) := \int_a^t f$

ekkor

F differenciálható x-ben és $F'(x) = f(x)$.

BIZONYÍTÁS:

Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $|t-x| < \delta$, $t \in [a,b] \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Ha tehát $x+h \in [a,b]$ és $|h| < \delta$, akkor $\int_p^a f(x)dt = (q-p)f(x)$ miatt

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right| \le \frac{1}{|h|}(\operatorname{sgn} h)\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon\, dt = \varepsilon.$$

Tehát létezik $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ és $= f(x)$.

11.33. TÉTEL (NEWTON – LEIBNIZ):

Legyen

$f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$

f integrálható

F folytonos

$F'(x) = f(x)$ ha $x \in]a,b[$

ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen (d_k) az $[a,b]$ normális beosztássorozata: $d_k := \{x_{k,i} : i = 0, \ldots, n\}$, ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik $t_{k,i} \in]x_{k,i-1}, x_{k,i}[$, amivel $F(x_{k,i}) - F(x_{k,i-1}) = F'(t_{k,i})\Delta x_{k,i} = f(t_{k,i})\Delta x_{k,i} \Rightarrow F(b) - F(a) =$

$$= \sum_{i=1}^{n_k} \left(F(x_{k,i}) - F(x_{k,i-1})\right) = \sum_{i=1}^{n_k} f(t_{k,i})\Delta x_{k,i} = \delta(f, d_k).$$

Mivel $\lim_{k\to\infty} \delta(f, d_k) = \int_a^b f$, ezért igaz az állítás.

11.34. TÉTEL:

Legyen

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

f', g' folytonos $[a,b]$-n

ekkor

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

BIZONYÍTÁS:

Ha $F(t) := \int_a^t fg' + \int_a^t f'g + f(a)g(a) - f(t)g(t) \qquad (t \in [a,b])$,

akkor 11.32. szerint létezik $[a,b]$-n $F'(t)$ és $F'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t) - (f(t)\cdot g(t))' = 0 \Rightarrow F(t) = k \in \mathbb{R}$, mivel $F(a) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow F(b) = 0$, amiből következik az állítás.

11.35. TÉTEL:

Legyen

$g : [a,b] \to [c,d]$

g folytonos $[a,b]$-n

$f : [c,d] \to \mathbb{R}$

f folytonos $[c,d]$-n

ekkor

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx .$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $H(u) := \int_{g(a)}^{u} f(x)dx$, ekkor H differenciálható $[c,d]$-n és $H'(u) = f(u)$.

Ezért, ha

$G(t) := \int_a^t f(g(x))\cdot g'(x)dx - \int_{g(a)}^{g(t)} f(x)dx$ $\qquad t \in [a,b]$, akkor

$G'(t) = f(g(t))g'(t) - H'(g(t))\cdot g'(t) = 0 \Rightarrow G$ konstans $[a,b]$-n.

De mivel $G(a) = 0$, ezért $G(b) = 0$, amiből következik az állítás.

11.36. DEFINÍCIÓ:

Ha

$a \in \mathbb{R}$, $\quad f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ és

minden $b \in]a,\infty[$ esetén f Riemann integrálható $[a,b]$-n

$F : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto F(x) := \int_a^x f(x)dx$

akkor

(1) Ha az F függvénynek $+\infty$-ben létezik határértéke, akkor ezt a számot f improprius integráljának nevezzük $]a,\infty[$-en.

Ha $A := \lim_{\infty} F$ úgy az

$$\int_a^{\infty} f := \int_a^{\infty} f(x)dx := A$$

jelöléseket használjuk és azt is mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens.

(2) Ha F-nek nem létezik határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^{\infty} f$ improprius integrál divergens. Ha az F függvény határértéke ∞-ben $+\infty$, illetve $-\infty$, akkor ezt

$\int_a^{\infty} f = \int_a^{\infty} f(x)dx = +\infty$, illetve $\int_a^{\infty} f := \int_a^{\infty} f(x)dx = -\infty$ módon jelöljük.

11.37. DEFINÍCIÓ:

Ha

$a, c \in \mathbb{R}$, $f :]a,c] \to \mathbb{R}$ és

minden $b \in]a,c[$ esetén f Riemann integrálható $[b,c]$-n, és

$$F :]a,c] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := \int_x^c f(x)dx$$

akkor

(1) Ha az F függvénynek a-ban létezik a jobboldali határértéke, akkor ezt a számot az f függvény $[a,c]$ feletti improprius integráljának nevezzük.

Ha $A := \lim_{a+0} F$ úgy az

$$\int_a^c f := \int_a^c f(x)dx := A$$

jelöléseket használjuk, és azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens.

(2) Ha F-nek nincs a-ban jobboldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^c f$ improprius integrál divergens.

Ha az F függvény a-beli jobboldali határértéke $+\infty$, illetve $-\infty$, akkor azt $\int_a^c f = \int_a^c f(x)dx = +\infty$, illetve $\int_a^c f = \int_a^c f(x)dx = -\infty$ módon jelöljük.

11.38. MEGJEGYZÉS:

Hasonló definíciók adhatók a $\int_{-\infty}^a f$, $\int_{-\infty}^{\infty} f$, illetve $f:[a,b[\to \mathbb{R}$ esetén $\int_a^b f$-re is.

11.39. MEGJEGYZÉS:

Ha $f:[a,c] \to \mathbb{R}$ integrálható $[a,c]$-n és $I := \int_a^c f$, akkor a 11.31. Tétel szerint az $x \mapsto F(x) := \int_x^c f(x)dx$-nek létezik a-ban határértéke, és az I. Ezért az improprius integrál a Riemann integrál általánosítása.

11.40. TÉTEL:

Legyen

$f:[a,\infty[\to \mathbb{R}$ integrálható minden $[a,b]$-n

ekkor

$$f \text{ improprius integrálja } [a,\infty[\text{-en konvergens} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ - hoz } \exists K \in \mathbb{R}, \\ p,q > K \Rightarrow \left| \int_p^q f \right| < \varepsilon \end{array}.$$

BIZONYÍTÁS:

Ha $F:[a,\infty[\to \mathbb{R}$, $x\mapsto F(x):=\int_a^x f(x)dx$, akkor a függvények ∞-beli határértékénél tanultak szerint, akkor és csak akkor létezik $\lim_{\infty} F(\in \mathbb{R})$, ha $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+$-hoz $\exists K\in\mathbb{R}$, hogy $p,q>K\Rightarrow |F(q)-F(p)|=\left|\int_p^q f\right|<\varepsilon$.

11.41. TÉTEL:

Legyen

$f:]a,c]\to\mathbb{R}$ integrálható minden $[b,c]$-n $\qquad (a<b<c)$

ekkor

f improprius integrálja $[a,c]$-n konvergens $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ - hoz $\exists\delta\in\mathbb{R}^+$, $a<p,q<a+\delta\Rightarrow\left|\int_p^q\right|<\varepsilon$.

BIZONYÍTÁS:

Az előző tétel bizonyításában követett gondolatmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

12. HATVÁNYSOROK

12.1. MEGJEGYZÉS:

A 6. fejezet definíciói és tételei általánosíthatók komplex tagú sorokra is.
A továbbiakban jelöli $\mathbb{K}$ az $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ halmazt.
Így például a 6.1. DEFINÍCIÓ a következőképpen általánosítható:
Legyen

$$\sum \mathbb{K}^{N^+} \to \mathbb{K}^{N^+}, \quad \sum(x) := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)_{n \in N^+}.$$

12.2. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{K},\ x_0 \in \mathbb{K},\ x \in \mathbb{K},$$

akkor a

$$\sum_0 \left(a_n \cdot (x - x_0)^n \right)$$

sort hatványsornak nevezzük. A a_i $(i = 0,1,...)$ számokat a hatványsor együtthatóinak, az $x_0 \in \mathbb{K}$ számot a hatványsor konvergencia-középpontjának nevezzük.

12.3. MEGJEGYZÉS:

Minden hatványsor minden $x \in \mathbb{K}$ számhoz egy numerikus sort rendel. Ha ez a numerikus sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy x a hatványsor konvergenciapontja, vagy hogy a hatványsor
x-ben konvergens.

12.4. DEFINÍCIÓ:

Ha

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$

akkor a

$$\rho := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ +\infty, & \text{ha} \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{különben} \end{cases}$$

kiterjesztett valós számok a $\sum_0 \left(a_n (x - x_0)^n\right)$ hatványsor konvergencia-sugarának nevezzük.

12.5. TÉTEL: CAUCHY-HADAMARD:

Legyen

akkor a ρ a $\sum_0 \left(a_n (x - x_0)^n\right)$ hatványsor konvergencia-sugara

ekkor

a fenti hatványsor a $B(x_0, \rho)$ halmaz pontjaiban abszolút konvergens, $|x - x_0| > \rho$ esetben pedig divergens.

BIZONYÍTÁS:

Legyen $x \in B(x_0, \rho)$.

Alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a szóban forgó sorra:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|a_n (x - x_0)^n\right|} = |x - x_0| \, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{\rho} < 1,$$

ezért a $\sum_0 |a_n| |x - x_0|^n$ konvergens. Ezzel az első részt igazoltuk.

Ha $|x - x_0| > \rho$, akkor ismét a gyökkritériumot alkalmazva, azt kapjuk, hogy $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| |x - x_0|^n} = \dfrac{|x - x_0|}{\rho} < 1$, így a sor divergens.

(A $B(x_0, \rho)$halmazt a hatványsor konvergencia-tartományának nevezzük.)

12.6. TÉTEL:

Legyen

$\sum_0 \left(a_n (x - x_0)^n\right)$ hatványsor,

ρ a konvergencia-sugara,

$r \in]0, \rho[$,

ekkor a

$\sum_0 |a_n| \cdot r^n$ sor konvergens.

BIZONYÍTÁS:

12.7. TÉTEL:

Legyen

$\sum_0 \left(a_n (x - x_0)^n\right)$ hatványsor,

ρ a konvergencia-sugara,

$x_1 \in \mathbb{K}$-ban a hatványsor konvergens,

ekkor

$|x_0 - x_1| \leq \rho$.

BIZONYÍTÁS:

12.8. DEFINÍCIÓ:

Ha

$\sum_0 \left(a_n (x - x_0)^n\right)$ hatványsor,

$\rho > 0$ konvergencia-sugár,

akkor a

$$f : B(x_0, \rho) \to \mathbb{K},$$

$$x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

módon értelmezett függvényt a szóban forgó hatványsor összegfüggvényének nevezzük.

12.9. MEGJEGYZÉS:

A pozitív konvergencia-sugárral rendelkező hatványsorok összegfüggvényeit analitikus függvényeknek szokás nevezni.

12.10. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K},$$

akkor az

$$a * b := \left(\sum_{i+k=n} a_i b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sorozatot az a és b sorozatok konvolúciójának nevezzük.

12.11. DEFINÍCIÓ:

Ha

$$a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K},$$

akkor a

$\sum_0 a$ és $\sum_0 b$ sorok Cauchy szorzatán a $\sum_0 a * b$ sort értjük.

12.12. TÉTEL:

Legyen

$\sum_0 a$, $\sum_0 b$ két abszolút konvergens sor,

ekkor

$\sum_0 a * b$ is abszolút konvergens és

$$\sum_0^\infty (a*b)(n) = \sum_0^\infty \left(\sum_{i+k=n} a_i b_k \right) = \left(\sum_0^\infty a_n \right) \left(\sum_0^\infty b_n \right).$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $c := a * b$, $A := \sum_{l=0}^\infty |a_i|$, $B := \sum_{k=0}^\infty |b_k|$.

A c sorozat értelmezéséből következik, hogy

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{k=0}^n b_k - \sum_{l=0}^n c_l \right| \le \sum_{\substack{i+k>n \\ i,k \le n}} |a_i b_k| =: r_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

↘ ↓ ↙

Mivel az utolsó összegben $i + k > n$, ezért i és k közül legalább az egyik nagyobb $n/2$-nél. Ezért $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$r_n \le \sum_{\frac{n}{2} < i \le n} |a_i| \sum_{k=0}^n |b_k| + \sum_{i=0}^n |a_i| \sum_{\frac{n}{2} < k \le n} |b_k| \le \sum_{\frac{n}{2} < i \le n} |a_i| \cdot B + A \cdot \sum_{\frac{n}{2} < k \le n} |b_k|.$$

A sorokra vonatkozó Cauchy kritérium alapján B és A szorzója egy nullsorozat

n-edik tagja így (r_n) nullsorozat. Ezért

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{k=0}^n b_k - r_n \le \sum_{l=0}^n c_l \le \sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{k=0}^n b_k + r_n.$$

Ezekből a közrefogási elv alapján következik, hogy

$$\sum_0^\infty c_n = \sum_0^n a_n \cdot \sum_0^n b_n .$$

Még igazolni kell, hogy $\sum_0 c$ abszolút konvergens.

Legyen $\gamma := |a| * |b|$. Alkalmazzuk az előbbi eredményt a $\sum_0 |a|$ és $\sum_0 |b|$ sorokra. Eszerint $\sum_0 \gamma$ konvergens. Mivel $|c_n| \le \sum_{i+k=n} |a_i| \cdot |b_k| = \gamma_n$, ezért $\sum_0 |c|$ konvergens, tehát $\sum_0 c$ abszolút konvergens. □

12.13. TÉTEL:

Legyen

$\sum_0 a_n (x - x_0)^n$ és $\sum_0 b_n (x - x_0)^n$ hatványsorok konvergencia-sugarai,

$\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ és $\rho_2 \in \mathbb{R}^+$,

f és g rendre az összegfüggvényeik,

ekkor

$x \in B(x_0, \rho_1) \cap B(x_0, \rho_2)$ esetén

$(f + g)(x) = \sum_{n=0}^\infty (a_n + b_n)(x - x_0)^n$ és

$(fg)(x) = \sum_{n=0}^\infty (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n)(x - x_0)^n .$

BIZONYÍTÁS:

Mivel

$x \in B(x_0, \rho_1) \cap B(x_0, \rho_2)$ esetén mindkét hatványsor abszolút konvergens, ezért a két sor összege és szorzata konvergens és összege $f(x) + g(x)$-szel, szorzata pedig $f(x) \cdot g(x)$-szel egyenlő.

12.14. TÉTEL:

A következő hatványsorok mindegyike minden $x \in \mathbb{C}$ (és így minden $x \in \mathbb{R}$) szám esetén konvergens:

(1) $\sum_0 \frac{x^n}{n!}$

(2) $\sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(3) $\sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(4) $\sum_0 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(5) $\sum_0 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

12.15. DEFINÍCIÓ:

exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(x) := \sum_0 \frac{x^n}{n!}$

cos: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \cos(x) := \sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

sin: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sin(x) := \sum_0 (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ch: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{ch}(x) := \sum_0 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

sh: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{sh}(x) := \sum_0 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

A szóban forgó függvények $\mathbb{R}$-re való leszűkítéseit is ugyanígy jelöljük. Ekkor természetesen a függvényértékek is $\mathbb{R}$-beliek.

12.16. TÉTEL:

Legyen

$Z \in \mathbb{C}$,

ekkor

(1) $\cos z + i \sin z = \exp(iz)$

(2) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(3) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(4) $\mathrm{ch}(iz) = \cos z$

(5) $\mathrm{sh}(iz) = i \sin z$.

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

12.17. TÉTEL:

Legyen

$Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$,

ekkor

(1) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$

(2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

(3) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \sin z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$

(4) $\mathrm{ch}(z_1 + z_2) = \mathrm{ch} z_1 \cdot \mathrm{ch} z_2 + \mathrm{sh} z_1 \cdot \mathrm{sh} z_2$

(5) $\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh} z_1 \cdot \mathrm{ch} z_2 + \mathrm{ch} z_1 \cdot \mathrm{ch} z_2$.

BIZONYÍTÁS:

(1) $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \dfrac{{z_1}^k}{k!} \cdot \dfrac{{z_2}^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} {z_1}^k \cdot {z_2}^{n-k} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = \exp(z_1 + z_2)$.

(2), (3), (4), (5) Gyakorlat.

Legyen $f(\xi) = \exp(z + w - \xi) \cdot \exp(\xi)$,

$f' = 0 \Rightarrow f$ konstans,

ezért $f(0) = f(\omega)$, ami bizonyítandó.

12.18. TÉTEL:

Legyen

$Z \in \mathbb{C}$,

ekkor

(1) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

(2) $\cos(-z) = \cos z$

(3) $\sin(-z) = -\sin z$

(4) $\mathrm{ch}(-z) = \mathrm{ch}z$

(5) $\mathrm{sh}(-z) = -\mathrm{sh}(z)$ ch

(6) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

(7) $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$

BIZONYÍTÁS:

Gyakorlat

12.19. TÉTEL:

Legyen

$x, y \in \mathbb{R}$,

ekkor

$$\exp(x + iy) = \exp x(\cos y + i \sin y).$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen $z = x + iy$, ekkor

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy) = \exp x(\cos y + i \sin y).$$

13. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

13.1 ALAPDEFINÍCIÓK

13.1.1 DEFINÍCIÓ

Legyen

$D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ tartomány

$F, G : D \to \mathbb{R}$, $F, G \in C_0$

$\exists x^*, x^{**} \in D : x_i^* = x_i^{**}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ $(F-G)(x^*) \neq (F-G)(x^{**})$

és jelölje

(1) $F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = G\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right)$ azt a problémát, hogy keresendő az összes olyan

$\varphi : I_\varphi \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C_n$, ahol I_φ nyílt intervallum, hogy

$\forall x \in I_\varphi : F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = G\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right)$

(Különböző intervallumok lehetnek φ-től függően)

akkor

az (1) problémát közönséges n-edrendű differenciálegyenletnek, az előbbi tulajdonságú φ függvényt pedig az (1) differenciálegyenlet megoldásának nevezzük.

13.1.2 DEFINÍCIÓ:

Az

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

alakú differenciálegyenleteket explicitnek, a nem explicit differenciálegyenletekét implicitnek nevezik.

13.1.3 DEFINÍCIÓ:

Legyen

$\xi, \eta_i \in \mathbb{R} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

és jelölje

(1) $F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = G\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right)$

(2) $y^{(i)}(\xi) = \eta_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

azt a problémát, hogy keresendő az (1) differenciálegyenlet összes olyan φ megoldása, amelyben

$\varphi^{(i)}(\xi) = \eta_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ teljesül.

Akkor az (1) – (2) problémát az (1) differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy feladatnak, az előbbi tulajdonságú φ függvényeket az (1) – (2) Cauchy feladat megoldásainak nevezzük.

13.1.4 DEFINÍCIÓ:

Az (1) – (2) Cauchly feladat Φ megoldását az (1) – (2) Cauchy feladat teljes megoldásának nevezzük, ha az (1) – (2) Cauchy feladat minden megoldására

$\varphi \subset \Phi$

teljesül.

13.2 NÉHÁNY ELEMI MÓDON MEGOLDHATÓ DIFFERENCIÁLEGYENLET

(A) SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ DIFFERENCIÁLEGYENLET

DEFINÍCIÓ:

Legyen

$I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum

$f : I \to \mathbb{R}, \qquad f \in C_0$

$g : J \to \mathbb{R}, \qquad g \in C_0$

akkor az

(1) $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ differenciálegyenletet szétválasztható változójú differenciálegyenletnek nevezzük.

TÉTEL:

Legyen

$$\xi \in I, \qquad \eta \in J$$

$$g(y) \neq 0 \qquad (y \in J)$$

$$F(x) = \int_{\xi}^{x} f(t)dt \qquad x \in I$$

$$G(y) = \int_{\eta}^{y} \frac{1}{g(t)} dt \qquad y \in J$$

$$\alpha = \inf\{x :]x, \xi[\subset F^{-1}(G(J))\}$$

$$\beta = \sup\{x : [\xi, x[\subset F^{-1}(G(J))\}$$

akkor az

$$\Phi(x) = G^{-1}(F(x)) \qquad (x \in]\alpha, \beta[)$$

teljes megoldása az

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y'(x) = f(x) \quad g(y(x)) \\ (2) & y(\xi) = \eta \end{array}\right\}$$ Cauchy feladatnak

BIZONYÍTÁS:

1. A FELTÉTEL SZÜKSÉGES

Tegyük fel, hogy $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ megoldása (1) – (2)-nek!

akkor

$$\varphi'(x) = f(x) \quad g(\varphi(x)) \qquad x \in]a, b[$$

$$\varphi(\xi) = \eta$$

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$$

$$\int_{\xi}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \underbrace{\int_{\xi}^{x} f(t)dt}_{F(x)} \qquad (*)$$

25.4 tétel miatt $F'(x) = f(x)$

$$G'(y)=\frac{1}{g(y)}$$

(*) bal oldalának primitív függvénye $(G\circ\varphi)$

Ugyanis:

$$(G\circ\varphi)'=(G'\circ\varphi)\varphi'$$

$$(G\circ\varphi)'(t)=(G'\circ\varphi)(t)(\varphi'(t))=G'(\varphi(t))\varphi'(t)=\frac{1}{g(\varphi(t))}\varphi'(t)$$

tehát:

$$\int_{\xi}^{x}\frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}dt=(G\circ\varphi)(x)-(G\circ\varphi)(\xi)=(G\circ\xi)(x)-G(\varphi(\xi))=(G\circ\varphi)(x)-G(\eta)=$$

$$=(G\circ\varphi)(x)$$

(*) miatt:

$$G(\varphi(x))=F(x).$$

2.G^{-1} FÜGGVÉNY

$g(y)\neq 0\overset{B.84.}{\Rightarrow} g(y)>0$ v. $g(y)<0$

$g(y)>0\Rightarrow\frac{1}{g(y)}>0\Rightarrow G'(y)>0\overset{18.1}{\Rightarrow}G$ szigorúan monoton növekvő $\overset{1.15}{\Rightarrow}G^{-1}$ függvény

($g(y)<0$ ugyanúgy)

tehát

$$\varphi(x)=G^{-1}(F(x))$$

3. Φ DEFINÍCIÓJA KORREKT

$$\Phi(x)=G^{-1}(F(x))\Rightarrow G(\Phi(x))=F(x)\Rightarrow F(x)\in G(J)\Rightarrow x\in F^{-1}(G(J))$$

$$\left.\begin{array}{l}F(\xi)=0\Rightarrow\xi=F^{-1}(0)\\ 0=G(\eta)\end{array}\right\}\Rightarrow\xi=F^{-1}(G(\eta))\Rightarrow$$ mivel η belső pontja $G(J)$-nek ξ belső pontja $F^{-1}(G(J))$-nek.

4. A FELTÉTEL ELEGENDŐ

$$\Phi(x)=G^{-1}(F(x))\qquad x\in\left]\alpha,\beta\right[$$

$$\Phi'(x)=\left(G^{-1}\right)'(F(x))\cdot F'(x)=g\left(G^{-1}(F(x))\right)f(x)=g(\Phi(x))f(x)$$

$$\Phi(\xi)=G^{-1}(F(\xi))=G^{-1}(0)=\eta$$

5. $\Phi(x)$ TELJES MEGOLDÁS

Ehhez elegendő, ha $I_\varphi \subset I_\phi$, ahol φ tetszőleges megoldás.

A bizonyítás 1. pontja szerint

$$\varphi = G^{-1}\big(F(x)\big) \qquad x \in \left]a, b\right[$$

α, β definíciója és a bizonyítás 4. pontja szerint $\alpha \le a, b \le \beta$, így $I_\varphi \subset I_\phi$.

(B) ELSŐRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET

DEFINÍCIÓ:

Legyen

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum

$p, q : I \to \mathbb{R}, \qquad p, q \in C_0$

akkor az

(1) $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ differenciálegyenletet közönséges elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Az (1) differenciálegyenletet homogénnak vagy inhomogénnak nevezzük aszerint, hogy $q = 0$, illetve $q \neq 0$.

TÉTEL:

Legyen

$\xi \in I, \quad \eta \in \mathbb{R}$

akkor

$$\Phi(x) = \left(\int_\xi^x e^{\int_\xi^t p(\tau)d\tau} q(t)dt + \eta \right) e^{-\int_\xi^x p(t)dt} \qquad x \in I$$

módon definiált Φ függvény teljes megoldása az

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x) \\ (2) & y(\xi) = \eta \end{array}\right\}$$ Cauchy feladatnak

BIZONYÍTÁS:

2. SZÜKSÉGESSÉG

Tegyük fel, hogy $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása a

(1*) $y'(x)+p(x)\,y(x)=0$ differenciálegyenletnek $\varphi(x)>0 \qquad (x\in I)$

$$\varphi'(x)+p(x)\,\varphi(x)=0 \qquad x\in I$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-p(x) \qquad x_0\in I$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt=\int_{x_0}^{x}-p(t)dt$$

$$\ln\varphi(x)-\ln\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x}-p(t)dt$$

$$\ln\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt$$

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}=e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt} \qquad x\in I$$

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

Behelyettesítéssel meg lehet győződni, hogy $\varphi(x)=c\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt} \qquad x\in I$

Minden $c\in\mathbb{R}$ esetén megoldása (1*)-nak.

A c konstans helyére egy c függvényt írunk és azt megpróbáljuk úgy választani, hogy az (1) egyenlet egy megoldását kapjuk. Ezt úgy hívják: konstansvariálás módszere.

Próbáljuk úgy megválasztani a $c: I\to\mathbb{R}$, $c\in C_1$, hogy a

$\varphi(x)=c(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt} \qquad (x\in I)$ megoldása legyen (1)-nek.

legyen $e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}=\varphi_0(x)$

$\varphi_0(x)$ megoldása (1*)-nak.

Tegyük fel, hogy $\varphi(x)=c(x)\cdot\varphi_0(x)$ megoldása (1)-nek.

$$\varphi'(x)+p(x)\,\varphi(x)=q(x)$$

$$c'(x)\cdot\varphi_0(x)+c(x)\cdot\varphi_0'(x)+p(x)\cdot c(x)\cdot\varphi_0(x)=q(x)$$

$$c'(x)\cdot\varphi_0(x)+c(x)\underbrace{\left(\varphi_0'(x)+p(x)\cdot\varphi_0(x)\right)}_{=0\quad 1^{*}miatt}=q(x)$$

$$c'(x)\cdot\varphi_0(x)=q(x)$$

$$c'(x)=\frac{q(x)}{\varphi_0(x)}$$

$$\int_{x_0}^{x}c'(t)dt=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi_0(t)}q(t)dt$$

$$c(x)-c(x_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi_0(t)}q(t)dt$$

$$c(x)=c(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi_0(t)}q(t)dt$$

$$c(x)=\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{t}p(\tau)d\tau}q(t)dt+c(x_0)$$

$$\varphi(x)=\left(\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{t}p(\tau)d\tau}q^{(t)dt}+c(x_0)\right)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

legyen $x_0=\xi$

$$c(x_0)=\eta$$

akkor

$$\varphi(x)=\left(\int_{\xi}^{x}e^{\int_{\xi}^{t}p(\tau)d\tau}q(t)dt+\eta\right)e^{-\int_{\xi}^{x}p(t)dt}$$

2. ELÉGSÉGESSÉG

(1) $$e^{\int_{\xi}^{t}p(\tau)d\tau}\cdot q(t)\cdot e^{-\int_{\xi}^{x}p(t)dt}+\left(\int_{\xi}^{x}e^{\int_{\xi}^{t}p(\tau)d\tau}q(t)dt+\eta\right)\cdot e^{-\int_{\xi}^{x}p(t)dt}\cdot\left(-p(t)\right)+$$

$$+p(x)\left(\int_{\xi}^{x}e^{\int_{\xi}^{t}p(\tau)d\tau}q(t)dt+\eta\right)\cdot e^{-\int_{\xi}^{x}p(t)dt}=q(t)$$

(2) $$\varphi(\xi)=(0+\eta)\cdot e^{0}=\eta$$

3. A $\Phi(x)=\left(\int_{\xi}^{x} e^{\int_{\xi}^{t} p(\tau)d\tau} q(t)dt+\eta\right)\cdot e^{-\int_{\xi}^{x} p(t)dt}$ TELJES MEGOLDÁS

legyen $J\subset I$ nyílt intervallum, $\xi\in J$

$\varphi: J\to \mathbb{R}$ megoldás

legyen továbbá:

$$\Phi_0(x)=\left(\int_{\xi}^{x} e^{\int_{\xi}^{t} p(\tau)d\tau} q(t)dt\right)\cdot e^{\int_{\xi}^{x} p(t)dt}$$

$$\Psi_0(x)=e^{\int_{\xi}^{x} p(t)dt} \qquad \Psi_0'(x)=e^{-\int_{\xi}^{x} p(t)dt}\cdot(-p(x))=\Psi_0(x)\cdot(-p(x))$$

$$h=\frac{\varphi-\Phi_0}{\Psi_0}$$

$$h'=\frac{(\varphi'-\Phi_0')\cdot\Psi_0-(\varphi-\Phi_0)\cdot\Psi_0'}{\Psi_0^2}=\frac{(\varphi'-\Phi')\Psi_0-(\varphi-\Phi_0)\cdot\Psi_0\cdot(-p)}{\Psi_0^2}=$$

$$=\frac{1}{\Psi_0}(\varphi'-\Phi_0'+p\varphi-p\Phi_0)=\frac{1}{\Psi_0}(\varphi'+p\varphi-(\Phi_0'+p\Phi_0))=$$

$$=\frac{1}{\Psi_0}(q-q)=0\Bigg]\Rightarrow h \text{ konstans}$$

$$h(\xi)=\frac{\varphi(\xi)-\Phi_0(\xi)}{\Psi_0(\xi)}=\frac{\eta-0}{1}=\eta$$

$$h(x)=\eta \qquad x\in J$$

$$\frac{\varphi(x)-\Phi_0(x)}{\Psi_0(x)}=\eta \qquad x\in J$$

$$\varphi(x)=\Phi_0(x)+\eta\Psi_0(x)=\Phi(x)$$

(C) EGZAKT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

DEFINÍCIÓ:

Legyen

$T\subset \mathbb{R}^2$ tartomány

$P, Q : T \to \mathbb{R}, \quad P, Q \in C_0, \quad Q \neq 0$

ha

$J\ F : T \to \mathbb{R}, \quad F \in C_0 : F' = (P, Q)$

(azaz $\partial_1 F = P, \quad \partial_2 F = Q,$ a (PQ) függvénymátrixnak létezik primitív függvénye.)

akkor

a

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

differenciálegyenletet egzakt differenciálegyenletnek nevezzük. $(\partial_2 P = \partial_1 Q)$

TÉTEL:

legyen az

(1) $P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x) = 0$ differenciálegyenlet egzakt és

F egy primitív függvénye (P, Q)-nak

$(\xi, \eta) \in T, \qquad \varphi : I \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \in C, \qquad (I$ nyílt intervallum)

és

(2) $y(\xi) = \eta$

akkor

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ megoldása az} \\ (1)\text{-}(2) \text{ Cauchy feladatnak}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{I. } F(x, \varphi(x)) = F(\xi, \eta) \\ \text{II. } \varphi(\xi) \qquad\quad = \eta\end{cases}$$

BIZONYÍTÁS:

2. <u>SZÜKSÉGESSÉG:</u>

Tegyük fel, hogy φ megoldása (1) – (2)-nek!

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0 \qquad\qquad x \in I$$

$$\varphi(\xi) = \eta$$

legyen

$$h(x) = F(x, \varphi(x)) \qquad\qquad x \in I$$

Az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel szerint:

$$\left[h'(x) = \partial_1 F(x, \varphi(x)) + \partial_2 F(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow h$ konstans

$$h(\xi) = F(\xi,\ \varphi(\xi)) = F(\xi, \eta)$$

2. ELÉGSÉGESSÉG

Tegyük fel, hogy $F(x, \varphi(x)) = F(\xi, \eta)$

$$\varphi(\xi) = \eta$$

$h(x) = F(x, \varphi(x))$

$h'(x) = 0$ mivel $F(x, \varphi(x)) = F(\xi, \varphi) =$ konstans.

DEFINÍCIÓ:

Ha

$$\mu : T \to \mathbb{R}, \quad \mu \in C_0, \quad \mu(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in T$$

és

(1*) $\mu(x, y(x))\, P(x, y(x)) + \mu(x, y(x))\, Q(x, y(x))\, y'(x) = 0$ differenciálegyenlet egzakt

akkor a

μ függvényt az (1) differenciálegyenlet egy integráló tényezőjének hívjuk.

MEGJEGYZÉS:

Az (1) és (1*) egyenletek megoldások szempontjából ekvivalensek.

Az (A) és (B) pontban tárgyalt differenciálegyenletek is megoldhatók az egzakt differenciálegyenletek megoldási módszerével:

integráló tényezőt kell keresni.